510
H36q

MATH. LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

COLLECTION DES PETITS MÉMENTOS CROVILLE-MORANT

QUESTIONS & FORMULES ESSENTIELLES DE MATHÉMATIQUES

(Classes de Première C et D)

(Programme du 27 juillet 1905)

F. HEINRICH
Agrégé des Sciences mathématiques

PARIS
LIBRAIRIE CROVILLE-MORANT
20, rue de la Sorbonne, 20

1907

LECTION DES PETITS MÉMENTOS CROVILLE-MORANT

QUESTIONS & FORMULES ESSENTIELLES DE ATHÉMATIQUES

(CLASSES DE PREMIÈRE C ET D)

(Programme du 27 juillet 1905)

F. HEINRICH
Agrégé des Sciences mathématiques

PARIS
LIBRAIRIE CROVILLE-MORANT
20, rue de la Sorbonne, 20

1907

QUESTIONS & FORMULES
ESSENTIELLES
DE
MATHÉMATIQUES

510
H36g
MATHEMATICS LIBRARY
GRAINGER MAY 30 '30

GÉOMÉTRIE

LIVRE V

1. Inégalités entre les faces a, b, c d'un trièdre.

[I] **Première inégalité** : $a < b + c$, a étant la plus grande face.

Démonstration : Faire dans la face BSC angle $\widehat{BSD} = \widehat{ASB}$; il reste à prouver $\widehat{DSC} < \widehat{ASC}$. Porter SD = SA ; mener le plan ABC quelconque par A et D. Les triangles égaux ASB et BSD donnent BD = AB ; comme BD + DC < AB + AC, il s'ensuit DC < AC, et alors des deux triangles DSC et ASC on conclut $\widehat{DSC} < \widehat{ASC}$.

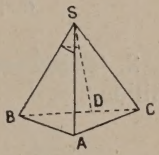

Fig. 1

[II] **Deuxième inégalité** : $o < a + b + c < 4$ droits. Cette formule est un cas particulier de la suivante

Limites de la somme des faces : $a, b, c, — e$ d'un angle polyèdre convexe.

685502

[III] **Troisième inégalité** : $o < a + b + c + \ldots + e < 4$ droits.

Démonstration : Couper l'angle polyèdre à n faces par un plan ABC — E ; joindre les sommets du polygone AB...E à un point O pris à son intérieur ; appliquer la formule [1] à chacun des n trièdres de sommets A, B, C...E :

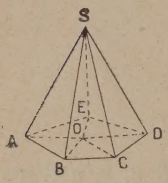

Fig 2

$$\widehat{EAB} < \widehat{BAS} + \widehat{EAS}$$
$$\widehat{DEA} < \widehat{AES} + \widehat{DES}$$

Additionner ces n inégalités, et l'on trouve :

$(2n - 4)$ droits $< 2n$ droits— $(a + b + \ldots + e)$, d'où

$$a + b + \ldots c < 4 \text{ droits.}$$

2. **Trièdres supplémentaires.** — 1° Définition.

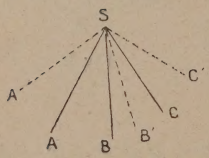

Fig. 3

Soit le trièdre SABC ; menons SA', SB', SC', perpendiculaires respectivement aux plans SBC, SAC, SAB et du même côté que SA, SB, SC. Le trièdre SA'B'C' est dit *supplémentaire* de SABC.

Inversement : SABC est supplémentaire de SA'B'C'. En effet, SB' et SC' étant construites perpendiculaires aux plans SAC

et SAB, sont perpendiculaires à SA, et le plan SB'C' l'est aussi. De plus SA' et SA étant du même côté du plan SBC, leur angle est aigu ; l'angle ASA' étant aigu, SA et SA' sont du même côté du plan SBC. Raisonnement analogue pour SB et SC.

3. Propriétés principales des trièdres supplémentaires.

(4) $$a' + A = 2 \text{ droits}$$

a' étant une face de l'un et A le dièdre de l'autre dont l'arête est perpendiculaire à la face a'.

Démonstration : D'après la construction du trièdre supplémentaire d'un trièdre donné on mène à la face P d'un dièdre PEFQ du trièdre donné, une demi-perpendiculaire SA' du même côté que la

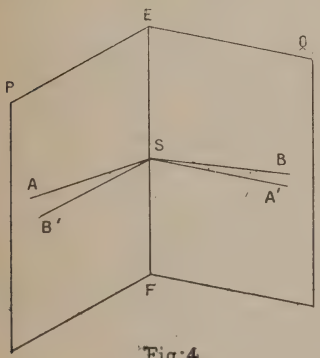

Fig. 4

face Q, et l'on mène à la face Q une demi-perpendiculaire SB′ du même côté que la face P ; l'angle $\widehat{A'SB'}$ et le rectiligne $\widehat{ASB}$ sont dans un même plan perpendiculaire à l'arête EF, et sont supplémentaires comme ayant leurs côtés perpendiculaires.

Inégalités entre les dièdres A, B, C d'un trièdre

(5) $$A + 2^{dr} > B + C$$

(6) $$2^{dr} < A + B + C < 6 \text{ dr.}$$

A étant le plus petit dièdre.

Démonstration : (1) et (2) appliquées aux faces $2^{dr} - A$, $2^{dr} - B$, $2^{dr} - C$ du trièdre supplémentaire conduisent à (5) et (6).

4. Cas d'égalité des trièdres.

1er cas	$a = a'$, $B = B'$, $c = c'$ avec orientation de même sens.
2e cas	$b = b'$, $c = c'$, $A = A'$ avec orientation de même sens
3e cas	$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ avec orientation de même sens.
4e cas	$A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ avec orientation de même sens.

les petites lettres désignant les faces et les grandes les dièdres.

Les deux premiers cas se démontrent par superposition : le 4e se déduit du 1er par la considération des trièdres supplémentaires.

Démonstration du 3e cas, — Porter :

$$SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C' ;$$

abaisser SO et S'O' perpendiculaires sur ABC et A'B'C'. Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun : les rayons AO et A'O' de leurs cercles circonscrits sont égaux. Les triangles rectangles SOA et

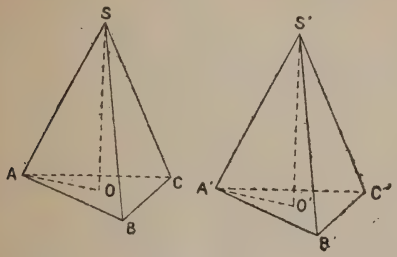

Fig. 3

S'O'A' sont par suite égaux et donnent SO = S'O'. Si donc on porte le triangle A'B'C' sur son égal ABC, les perpendiculaires SO et S'O' coïncideront, et S' tombera en S.

5. **Volume du parallélépipède rectangle.**

(7) $$V = B \times h$$

Démonstration : Si la hauteur h contient 4 mètres et si les côtés de la base renferment 3 m. 75 et 2 m. 40, on divise l'aire B de la base en 375×240 carrés ayant un centimètre de côté par des parallèles aux côtés de la base ; sur chacun de ces carrés on peut supposer placé un parallélépipède rectangle qui a pour hauteur $h = 400$ c. et qu'on décompose en 400 cubes ayant un centimètre de côté ; donc le volume V est :

$$V = 375 \times 240 \times 400 \text{ cm}^3 = 3{,}75 \times 2{,}4 \times 4 \text{ m}^3$$

ou :

$$V = B \times h.$$

6. **Volume du parallélépipède droit.**

(8) $$V = B \times h.$$

Démonstration : Soit le parallélépipède droit ABCDEFGH donné ; il est *équivalent* au parallélépi-

pède rectangle auxiliaire ADQMEHPN, car les prismes *droits* DQCHPG et AMBENF sont *superposables* comme ayant bases égales DQC = AMB et même hauteur DH = AE; donc V = ADQM × DH, ce que l'on peut écrire à cause de l'égalité des triangles AMB et DQC :

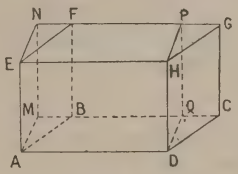

Fig. 6

$$V = ABCD \times DH = B \times h.$$

7. Volume du prisme droit.

(9) $$V = B \times h$$

Démonstration : Soit le prisme triangulaire droit ABCA'B'C'; former le parallélépipède ABCDA'B'C'D';

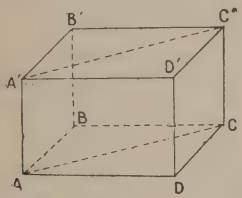

Fig 7

il est le double du prisme donné, car les deux prismes ABCA'B'C' et ACDA'C'D' sont *superposables ;* donc :

$$V = \frac{1}{2} ABCD \times AA' = ABC \times AA' = B \times h.$$

Quand le prisme est polygonal, on le décompose en prismes triangulaires dont on fait la somme des volumes.

8. Première expression du volume du prisme oblique.

(10) $V = S \times a$ (S section droite
a arète latérale)

Démonstration : Il s'agit de prouver qu'un prisme oblique ABCD A'B'C'D' est *équivalent* au prisme droit MNPQ M'N'P'Q' qui a pour base S la section droite MNPQ et pour hauteur MM' une longueur a égale à l'arète latérale AA' du prisme oblique. Cela résulte de ce que les deux prismes ont une partie commune ABCDM'N'P'Q' et que les deux troncs de prismes droits MNPQABCD et M'N'P'Q'A'B'C'D' ayant leurs arètes latérales égales chacune à chacune *se superposent* dès qu'on fait coïncider les polygones égaux MNPQ et M'N'P'Q'.

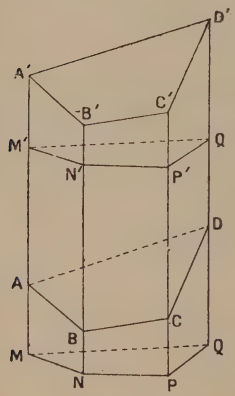

Fig. 8

9. Volume du parallélépipède oblique.

(11) $$V = B \times h.$$

Démonstration : Mener la section droite MNPQ

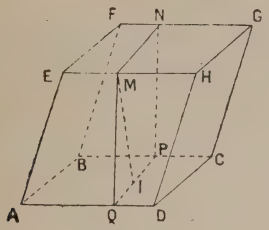

Fig. 9

perpendiculaire à AD ; sa hauteur MI est celle du parallélépipède ABCDEFGH. On a (n° 9) :

$$V = \text{surf. MNPQ} \times AD$$
$$= MI \times PQ \times AD = MI \times \text{surf. ABCD} = h \times B.$$

10. Deuxième expression du volume du prisme oblique.

(12) $$V = B \times h.$$

Démonstration : Soit le prisme triangulaire ABC A'B'C', former le parallélépipède ABCDA'B'C'D', mener leurs sections droites MNP et MNPQ. Comme MNP est la moitié de MNPQ et que les deux solides considérés ont même arête latérale, on conclut :

$$V = \frac{1}{2} \text{ volume } ABCDA'B'C'D'$$

$$= \frac{1}{2} ABCD \times h = ABC \times h = B \times h.$$

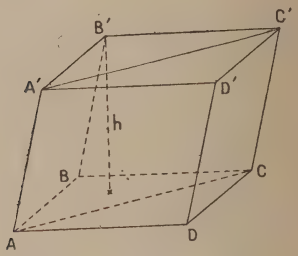

Fig 10

Quand le prisme est polygonal, on le décompose en prismes triangulaires dont on fait la somme des volumes.

11. Application.

Projection MNPQ d'une aire plane ABCD.

(13) $$s = S \times \cos \alpha.$$

s étant l'aire de MNPQ, S l'aire de ABCD, α l'angle aigu des plans MNPQ, et ABCD.

Démonstration : Sur ABCD construisons un prisme ABCDA'B'C'D' de hauteur D'H quelconque, l'angle $\widehat{DD'H}$ est égal à α.

On a :

(n° 9) $V = DD' \times MNPQ$,
(n° 11) $V = ABCD \times D'H$,

d'où :

$$\frac{MNPQ}{ABCD} = \frac{D'H}{DD'},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{MNPQ}{ABCD} = \cos \alpha.$$

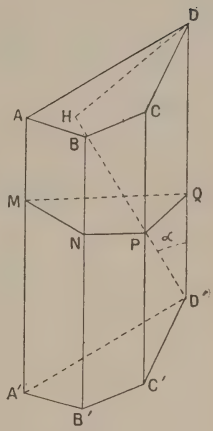

Fig. 11

12. Volume de la pyramide.

$$(14) \quad V = \frac{1}{3} B \times h.$$

Démonstration : Décomposons la hauteur h en n parties égales ; par les points de division menons des sections parallèles à la base ABCD, et sur elles construisons des prismes $A_1B_1C_1D_1A_2B'_1C'_1D'_1$.. dont nous appelons les bases b_1, b_2, b_{n-1} V est la limite de la somme de ces prismes pour n infini

$$V = \lim. \frac{h}{n} \times (b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}).$$

Or :

$$\frac{b_p}{B} = \frac{\overline{A_pB_p}^2}{\overline{AB}^2},$$

d'où :

$$\frac{b_p}{B} = \frac{\overline{SA_p}^2}{\overline{SA}^2},$$

ou enfin :

$$\frac{b_p}{B} = \frac{\left(\frac{ph}{n}\right)^2}{h^2} = \frac{p^2}{n^2}$$

et :

$$b_p = \frac{B}{n^2} \times p^2.$$

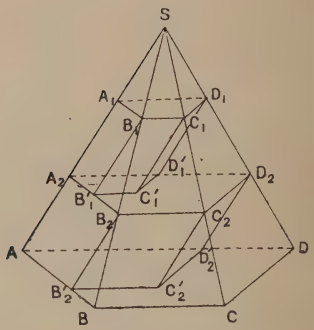

Fig. 12

Remplaçant $b_1, b_2 - b_{n-1}$ par leurs valeurs, on a :

$$V = \lim. \frac{Bh}{n^3} \times (1^2 + 2^2 + - + (n-1)^2).$$

Or, on sait en algèbre que :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 = \frac{p\,(p+1)\,(2\,p+1)}{6}$$

d'où remplaçant :

$$p \text{ par } n - 1$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \times n \times (2\,n-1)}{6}$$

et :

$$V = \lim.\ \frac{Bh}{6}\ \frac{(n-1)\,(2\,n-1)}{n^2}$$

$$= \lim.\ \frac{Bh}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

ou :

$$V = \frac{Bh}{3}\ .$$

Quand le prisme est polygonal on le décompose en prismes triangulaires dont on fait la somme des volumes.

13. Volume du tronc de pyramide.

$$(15) \qquad V = \frac{1}{3}\ h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Démonstration : On a :

$$V = \text{vol. SABCD} - \text{vol. SA'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3}\,B \times SH - \frac{1}{3}\,b \times SH'.$$

Or, on sait que :

$$\frac{\overline{SH}^2}{B} = \frac{\overline{SH'}^2}{b}$$

d'où :

$$\frac{SH}{\sqrt{B}} = \frac{SH'}{\sqrt{b}} = \frac{SH - SH'}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{h}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

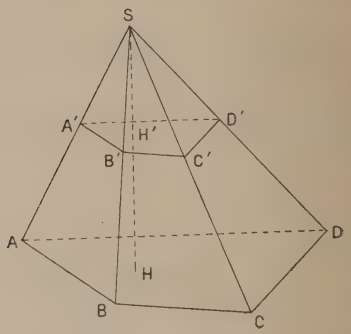

Fig 13

On en tire :

$$SH = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \qquad SH' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Il vient :

$$V = \frac{1}{3}\ h\ \frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{1}{3}\ h\ \frac{(\sqrt{B})^3 - (\sqrt{b})^3}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

En appliquant l'identité :

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2,$$

on trouve :

$$V = \frac{1}{3} h \left[(\sqrt{B})^2 + \sqrt{B}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\right]$$

$$= \frac{1}{3} h \left(B + \sqrt{Bb} + b\right).$$

14. Première expression du volume du tronc de prisme triangulaire.

$$(16) \qquad V = \frac{B\,(h + h' + h'')}{3}$$

B étant l'une des bases ABC ; h, h', h'' étant les perpendiculaires abaissées sur elles, des sommets D, E, F, de l'autre base.

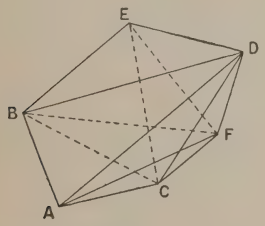

Fig. 14

Démonstration : Le plan DBC détache le tétraè-

dre DABC qui a pour base B et pour hauteur h. Le plan DEC partage la pyramide restante DBEAFC en deux tétraèdres EDBC, FCDE.

Le tétraèdre EDBC est *équivalent* à EABC, comme ayant même base EBC et des hauteurs égales issues de A et D ; ce tétraèdre EABC est de base B et de hauteur h'.

Le tétraèdre FCDE est *équivalent* à FCAB, car leurs bases FCD et FCA sont équivalentes et leurs hauteurs issues de E et B sont égales, ce tétraèdre FCAB est de base B et de hauteur h''.

15. Deuxième expression du volume du tronc de prisme triangulaire.

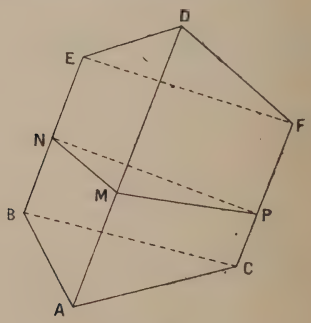

Fig. 15

$$V = S\left(\frac{a + a' + a''}{3}\right) \tag{17}$$

S étant la section droite ; a, a', a'', étant les arètes latérales AD, BE, CF.

Démonstration : On a :

$$V = \text{vol. MNPDEF} + \text{vol. MNPABC}$$

ou (n° 13) :

$$V = \frac{1}{3}\ \text{MNP}\,(\text{DM} + \text{EN} + \text{FP})$$
$$+ \frac{1}{3}\ \text{MNP}\,(\text{AM} + \text{BN} + \text{CP})$$
$$= \frac{1}{3}\,\text{MNP}\,(\text{AD} + \text{BE} + \text{CF}).$$

16. Equivalence de deux polyèdres symétriques.

Démonstration : On établit que pour démontrer les propriétés de deux figures symétriques, on peut choisir le mode de symétrie qu'on veut. Si donc les deux polyèdres sont deux pyramides, on les placera de façon qu'elles aient même base et leurs sommets symétriques par rapport à la base commune ; elles seront par conséquent équivalentes comme ayant la même base et des hauteurs égales.

Si les deux polyèdres sont quelconques, on les décompose en pyramides deux à deux symétriques et par suite équivalentes.

17. Rapport des volumes V et V′ de deux polyèdres semblables.

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3 \tag{18}$$

λ étant le rapport de similitude.

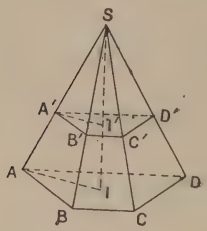

Fig. 16

Démonstration : On dit que deux polyèdres sont semblables, lorsqu'on peut les placer de façon qu'ils soient homothétiques directs. Si l'on a affaire à deux pyramides, on peut donc les supposer homothétiques, par rapport au sommet.

On a :

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \frac{A'B'C'D'}{ABCD} \times \frac{SI'}{SI}$$

$$= \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 \times \frac{S'A'}{SA} = \lambda^2 \times \lambda = \lambda^3.$$

Lorsque les deux polyèdres sont quelconques, on les décompose en pyramides deux à deux semblables dont j'appelle les volumes $v_1, v_2, \ldots v_n$ d'une part et $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ d'autre part, on a :

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_2} = \ldots = \frac{v'_n}{v_n} = \lambda^3,$$

d'où :

$$\frac{v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = \lambda^3.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3.$$

LIVRE VII

CONE, CYLINDRE, TRONC DE CONE

18. Aire de la surface latérale d'un cylindre droit.

(19) $S = 2\pi Rh$

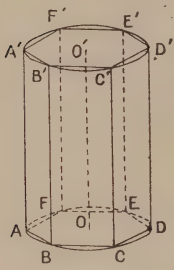

Fig 17

R étant le rayon et h la hauteur.

Démonstration : Inscrire un prisme régulier. S est la limite de l'aire de sa surface latérale.

$$S = \lim. \text{ de } h \times (AB + BC + \ldots + FA) = h \times 2\pi R.$$

19. Aire de la surface totale du cylindre droit.

$$\Sigma = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R).$$

20. Volume du cylindre à base circulaire.

(20) $V = \pi R^2 h.$

Démonstration : V est la limite du volume d'un prisme inscrit ayant pour base un polygone régulier :

$$V = \text{lim. de } h \times \text{surf. AB} - F$$
$$= h \times \pi R^2.$$

21. **Aire de la surface latérale d'un cône droit.**

(21) $S = \pi R \times a$

R étant le rayon de base et a la génératrice.

Démonstration : Inscrire une pyramide régulière, S est la limite de l'aire de sa surface latérale.

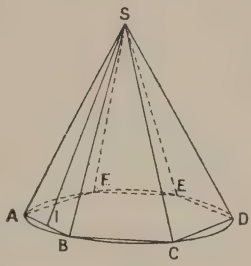

Fig. 18

$$S = \text{lim. de } \frac{1}{2} \text{ SI} \times (\text{AB} + \text{BC} + \ldots + \text{FA})$$
$$= \frac{1}{2} a \times 2 \pi R = \pi R a.$$

22. **Aire de la surface totale du cône droit.**

$$\Sigma = \pi R a + \pi R^2 = \pi R (a + R).$$

23. Volume du cône à base circulaire.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \tag{22}$$

h étant la hauteur.

Démonstration : V est la limite du volume d'une pyramide inscrite ayant pour base un polygone régulier.

$$V = \text{lim. de } \frac{1}{3} h \times \text{surf. } AB...F$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

24. Aire de la surface latérale du tronc de cône droit.

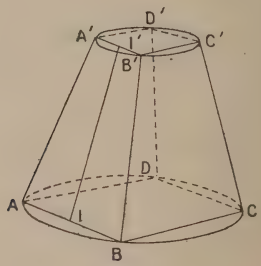

Fig. 19

$$S = \pi (R + R') a \tag{23}$$

R et R' étant les rayons des bases, a la génératrice.

Démonstration : S est la limite de l'aire de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulière inscrit :

$$S = \text{lim. de } \frac{1}{2} \Pi' [(AB + A'B') + (BC + B'C') + \ldots (DA + D'A')]$$

$$= \text{lim. de } \frac{1}{2} \Pi' [(AB + \ldots DA) + (A'B' + \ldots + D'A')]$$

$$= \frac{1}{2} a \times (2 \pi R + 2 \pi R') = \pi (R + R') a$$

25. **Aire de la surface totale du tronc de cône droit.**

$$\Sigma = \pi (R + R') a + \pi (R^2 + R'^2).$$

26. **Volume du tronc de cône à bases circulaires.**

$$(24) \qquad V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R'^2 + RR')$$

h étant la hauteur.

Démonstration : V est la limite du volume d'un tronc de pyramide inscrit dont les bases sont des polygones réguliers :

$$V = \text{lim. } \frac{1}{3} h (\text{surf. } ABCD + \text{surf. } A'B'C'D' + \sqrt{\text{surf. } ABCD \times \text{surf. } A'B'C'D'})$$

$$= \frac{1}{3} h \left(\pi R^2 + \pi R'^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi R'^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi h \left(R^2 + R'^2 + RR'\right).$$

§ II

Surfaces tournantes.

27. **Aire de la surface engendrée par une ligne polygonale régulière ABCD tournant autour d'un axe XY passant par son centre, situé dans son plan et ne la traversant pas.**

(25) $$S = 2\,\pi OI \times ad$$

$2\,\pi OI$ étant la circonférence inscrite et *ad* la projection de la ligne.

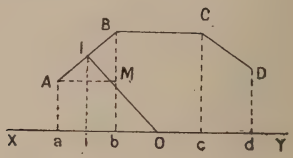

Fig. 20

Démonstration :

Surf. (AB) $= \pi\,(Aa + Bb)\,AB = 2\,\pi Ii \times AB.$

Mener AM parallèle à XY ; les triangles semblables ABM et O$I i$ donnent :

$$\frac{AB}{OI} = \frac{AM}{I i}$$

d'où :

$$I i \times AB = OI \times ab,$$

et :

$$\text{surf. } (AB) = 2\,\pi O i \times ab.$$

De même :

$$\text{surf. } (BC) = 2\,\pi O i \times bc$$
$$\text{surf. } (CD) = 2\,\pi O i \times cd.$$

additionnant, on a : $S = 2\,\pi O i \times ad.$

28. Aire de la zone.

(26) $S = 2\,\pi R h$

h étant la hauteur, R le rayon de la surface.

Démonstration : S est la limite de l'aire engendrée par la ligne régulière ACDB :

$$S = \lim.\ 2\,\pi\ OI \times ab$$
$$= 2\,\pi\ R h.$$

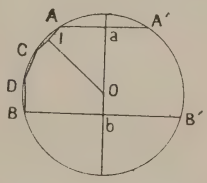

Fig. 21

29. Aire de la sphère.

(27) $S = 4\,\pi R^2.$

Démonstration : La surface de la sphère est celle d'une zone de hauteur 2R :

$$S = 2\,\pi R \times 2R = 4\,\pi R^2.$$

§ III

Volumes tournants.

30. **Volume engendré par un triangle ABC tournant autour d'un axe XAY situé dans son plan et ne le traversant pas.**

$$V = \frac{1}{3} AH \times \text{surf. } (BC) \tag{28}$$

AH étant hauteur.

Démonstration : Le triangle a un 2e sommet sur l'axe. Menons la hauteur CI :

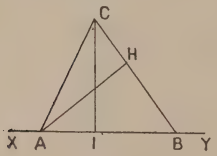

Fig. 22

$$V = \text{vol.}(ACI) + \text{vol.}(BCI)$$

$$= \frac{1}{3} \overline{\pi CI}^2 (AI + BI)$$

ou :

$$V = \frac{1}{3} \pi CI \times CI.AB$$

$$= \frac{1}{3} \pi CI \times 2 \text{ aire } ABC$$

$$= \frac{1}{3} \pi CI \times AH \times BC = \frac{1}{3} AH \times \pi CI \times BC$$

ou enfin :

$$V = \frac{1}{3} AH \times \text{surf. } (BC).$$

2° Le côté BC est oblique sur l'axe et n'y a aucun sommet :

$$V = \text{vol. (ACD)} - \text{vol. (ABD)}$$
$$= \frac{1}{3}\ AH\ [\text{surf. (CD)} - \text{surf. (DB)}]$$
$$= \frac{1}{3}\ AH \times \text{surf. (BC)}.$$

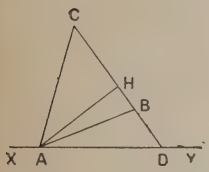

Fig 23

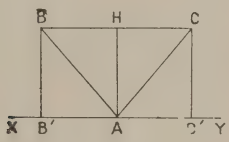

Fig 24

3° Le côté BC est parallèle à l'axe.

Projeter B et C en B′ et C′ on a :

$$V = \text{vol. (BCC'B')} - \text{vol. (ABB')} - \text{vol. (ACC')}$$
$$= \pi\overline{AH}^2 \times BC - \frac{1}{3}\ \pi\overline{AH}^2 \times BH$$
$$- \frac{1}{3}\ \pi\overline{AH}^2 \times CH = \frac{2}{3}\ \pi\overline{AH}^2 \times BC$$
$$= \frac{1}{3}\ AH \times 2\pi AH \times BC = \frac{1}{3}\ AH \times \text{surf. (BC)}.$$

31. Volume engendré par un secteur polygonal régulier OABCD tournant au-

tour d'un axe XOY situé dans son plan et ne le traversant pas.

$$(29) \qquad V = \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2\, ad$$

OI étant l'apothème et *ad* la projection de la ligne polygonale sur l'axe.

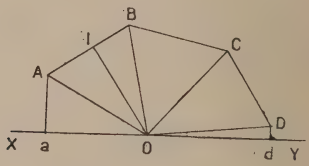

Fig 25

Démonstration : Appliquer le n° 27 aux triangles OAB, OBC, OCD et faire l'addition, on trouve :

$$V = \frac{1}{3}\, OI \times \text{surf. (ABCD)}$$

$$= \frac{1}{3}\, OI \times 2\,\pi OI \times ad = \frac{2}{3}\,\pi\overline{OI}^2 \times ad.$$

32. Volume du secteur sphérique.

$$(30) \qquad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

h étant la projection A'B' de l'arc AB sur l'axe.

Démonstration :

$$V = \lim.\ \text{vol.}\ (\text{secteur polygonal OACDB})$$
$$= \lim.\ \frac{2}{3}\ \pi\overline{OI}^2 \times A'B' = \frac{2}{3}\ \pi R^2 h.$$

Volume de la sphère.

(31) $$V = \frac{4}{3}\ \pi R^3.$$

Démonstration : La sphère est un secteur sphérique engendré par un secteur circulaire égal à un demi-cercle.

Appliquant le n° 29, on a :

$$V = \frac{2}{3}\ \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\ \pi R^3.$$

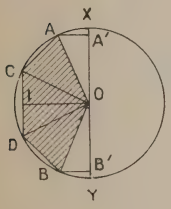

Fig 26

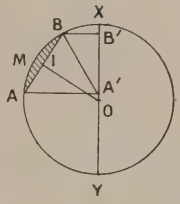

Fig 27

34. Volume de l'anneau.

(32) $$V = \frac{1}{6}\ \pi\overline{AB}^2.A'B'$$

A'B' étant la projection sur l'axe de la corde du segment générateur AMB.

Démonstration :

$$V = \text{vol. (secteur OAB)} - \text{vol. (triangle OAB)}$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^2 \times A'B' - \frac{1}{3}\ OI \times \text{surf. (AB)}$$

Or, n° 24 :

$$\text{surf. (AB)} = 2\pi OI \times A'B'$$

il vient :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 A'B' - \frac{2}{3}\pi \overline{OI}^2 \times A'B'$$
$$= \frac{2}{3}\pi A'B'\left(R^2 - \overline{OI}^2\right) = \frac{2}{3}\pi A'B'$$
$$\times \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 \times A'B'.$$

35. **Volume du segment sphérique ou volume compris entre deux plans parallèles AD, BC.**

$$(33) \quad V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h\left(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2\right)$$

h étant la distance AA' des deux plans parallèles.

Démonstration :

$$V = \text{vol. (trapèze } AA'B'B) + \text{vol. (segment } AMB)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h\,(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + AA' \times BB')$$
$$+ \frac{1}{6}\pi h \times \overline{AB}^2.$$

Mener AH parallèle à A'B', remplacer $\overline{AB}^2$ par $\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$, c'est-à-dire $h^2 + (BB' - AA')^2$; il vient après simplification :

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h\,(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2).$$

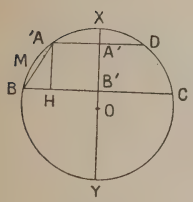

Fig. 28

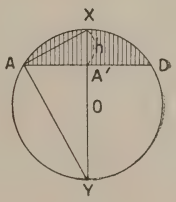

Fig. 29

36. **Volume du segment sphérique à une base.**

$$(34) \qquad V = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3R - h).$$

Démonstration : Envisager le segment A X D

comme ayant deux bases dont l'une est nulle. On a (n° 32).

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h \times \overline{AA'}^2$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h \times h(2R - h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

Quelques questions moins importantes mais qu'il est bon de savoir.

---

37. **Théorème. — Une droite AB et un point extérieur C déterminent un plan et un seul** (1).

Un plan tournant autour de AB occupera à un moment donné une position P où il contiendra le point C.

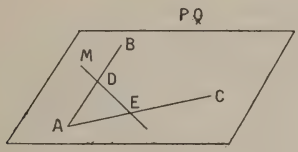

Fig. 30

(1) Les examinateurs ne demandent jamais à l'écrit les théorèmes du commencement du livre V et s'en tiennent à l'oral à ceux des nos 37, 38, 39, 40, 41, 42 sur lesquels ils interrogent d'ailleurs rarement. Cela provient de ce que l'ordre des théorèmes du début varie avec chaque professeur.

Il n'y a pas un second plan Q renfermant aussi les droites AB et AC ; car tout point M de P appartient à Q puisqu'une droite quelconque MDE de P se trouve aussi dans Q comme y ayant les deux points D et E. Il résulte de ce théorème que deux plans distincts n'ont aucun point commun hors de leur droite d'intersection.

38. **Théorème.** — **Une droite AB parallèle à une droite CD d'un plan P est parallèle à ce plan.**

AB et CD forment un plan Q ; si AB rencontrait P, c'est que AB rencontrerait sa parallèle CD.

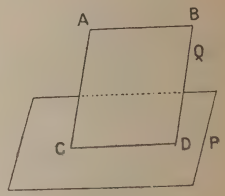

Fig. 31

40. **Théorème.** — **1° Deux angles BAC et B'A'C' dont les côtés sont parallèles et de même sens sont égaux ; 2° leurs plans P et P' sont parallèles.**

1° Porter A'B' = AB et A'C' = AC. Les figures AA'B'B et AA'C'C sont des parallélogrammes ; donc BCC'B' est un parallélogramme comme ayant BB' et CC' égaux et parallèles à AA'.

Les deux triangles BAC et B'A'C' sont égaux d'après le 3e cas d'égalité, et $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

2° Si P′ coupait P suivant une droite MN, cette droite MN rencontrerait l'une au moins des droites

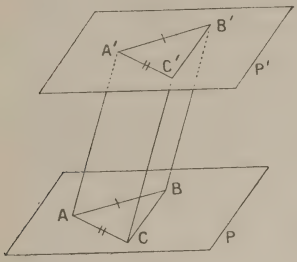

Fig 32

A′B′ ou A′C′ et cette dernière ne serait pas parallèle à P ce qui est contraire au théorème précédent.

40. **Théorème. — Une droite AB perpendiculaire à deux droites AC et AD d'un plan P est perpendiculaire à ce plan.**

Il suffit de prouver que AB est perpendiculaire à une droite quelconque AE de P. Porter AB′ = AB et tracer une droite CED dans P. Les triangles BCB′ et BDB′ sont isocèles, car les médianes CA et AD sont hauteurs. Les triangles BCD et B′CD sont égaux ; donc EB = EB′ et AE est perpendiculaire à BB′.

De ce théorème se déduit le théorème des *trois perpendiculaires* qui est le suivant :

Si AB est perpendiculaire à un plan P et que de son pied on abaisse AC perpendiculaire à une droite

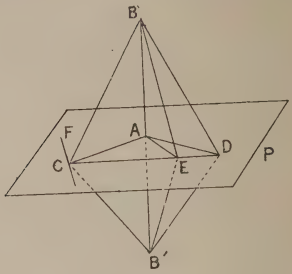

Fig. 33

CF du plan P, BC est perpendiculaire à CF. En effet CF est perpendiculaire à AB et AC ; donc CF est perpendiculaire au plan BAC et par suite à BC.

41. **Théorème**. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs rectilignes.*

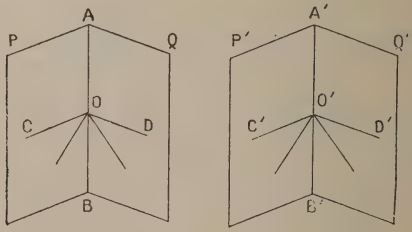

Fig 34

On démontre par superposition que si deux dièdres sont égaux, leurs rectilignes sont égaux.

Ceci posé, s'il existe un petit dièdre contenu *trois fois* dans $\widetilde{PABQ}$ et quatre fois dans P'A'B'Q' : un même petit angle sera aussi contenu trois et quatre fois dans les rectilignes $\widetilde{COD}$ et $\widetilde{C'O'D'}$.

42. *La symétrie par rapport à un plan se ramène à la symétrie par rapport à un point.*

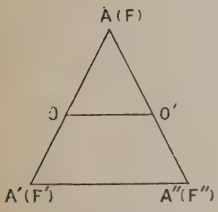

Fig.35

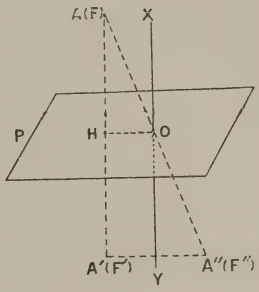

Fig 36

1° *Deux figures F' et F'' symétriques à une figure F par rapport à deux points O et O' sont superposables.* Soient A, A', A'' trois points correspondants quelconques de F, F' et F''. Une translation représentée par le vecteur A'A'' parallèle à la direction fixe OO' et double de OO', amènera la coïncidence de F' et F''.

2° *Deux figures F' et F'' symétriques à une figure F l'une par rapport à un plan P, l'autre par rapport à un point O de ce plan sont superposables.* Soient A, A', A'',

trois points correspondants quelconques de F,F′,F″. L'axe fixe XY perpendiculaire à P en O est perpendiculaire à A′A″ en son milieu. Une rotation de 180° autour de XY produira la superposition de F′ et F″.

3° *Deux figures F′ et F″ symétriques à une figure F par rapport à un plan P et à un point O quelconques sont superposables.*

Soit F_1 symétrique par rapport à un point O_1 du plan P ; F′ et F_1 sont superposables (n° 42, 2°) F″ et F_1 sont superposables (n° 42, 1°) : donc F′ et F″ le sont.

43. Définition et propriétés des polyèdres homothétiques.

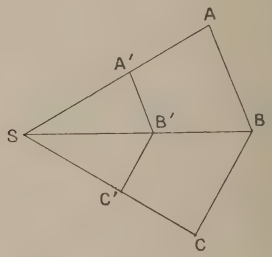

Fig 37

Deux polyèdres sont homothétiques lorsque leurs points A et A′, B et B′,... correspondants sont en ligne droite avec un point fixe S et sont tels que :

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{SB} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \ldots = \lambda,$$

λ *étant un nombre constant.*

L'homothétie est directe ou inverse suivant que λ est positif ou négatif. De la définition, il résulte que A'B' et AB, B'C' et BC... sont parallèles, que de plus :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \text{valeur absolue de } \lambda.$$

Donc deux polyèdres homothétiques ont leurs faces *homologues* semblables et leurs dièdres 2 à 2 égaux ; leurs angles trièdres seront par conséquent 2 à 2 égaux ou symétriques suivant que l'homothétie sera directe ou inverse.

44. Polyèdres semblables. — *Un polyèdre P' est* dit *semblable* à un *polyèdre* P lorsqu'il est *superposable à un polyèdre* P_1 *homothétique direct de* P.

Il résulte du n° 43 que P et P' ont leurs faces homologues semblables, leurs dièdres homologues égaux, leurs angles trièdres homologues égaux.

45. Symétries du cube et de l'octaèdre régulier. — Les trois droites joignant le centre du cube aux centres des faces, et les six droites joignant le centre du cube aux milieux des arêtes sont neuf axes de symétrie.

L'octaèdre régulier

SABCDS'

est formé par la réunion de deux pyramides régulières adossées par leurs bases qui sont des carrés. Les douze arêtes sont égales.

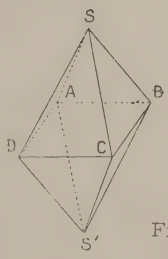

Fig. 38

L'octaèdre régulier a neuf axes de symétrie qui sont SS', AC, BD et les six droites joignant les milieux de deux arêtes parallèles.

Dans les deux solides deux axes de symétrie déterminent un *plan* de symétrie.

46. **Trouver le rayon d'une sphère solide O.** — On marque deux points A et B sur la sphère ; de A et B comme pôles avec une même ouverture du compas d'épaisseur, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en M. On construit de même sur la sphère deux autres points M′ et M″ équidistants de A et B. Les points O, M, M′, M″ sont dans un même plan perpendiculaire à AB en son milieu. Si donc, on mesure les cordes MM′, MM″, M′M″ et qu'avec leurs longueurs comme côtés on forme un triangle m, m', m'', le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est égal au rayon de la sphère.

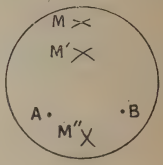

Fig. 39

GÉOMÉTRIE

Démonstration aux

Inégalités dans un trièdre :

$$a < b + c \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 1.\ \text{I})$$

$$0 < a + b + c < 4^{\text{dr}} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 1.\ \text{II})$$

$$\text{A} + 2^{\text{dr}} > \text{B} + \text{C} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 3)$$

$$2^{\text{dr}} < \text{A} + \text{B} + \text{C} < 6^{\text{dr}} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 3)$$

Inégalités dans un angle polyèdre convexe :

$$0 < a + b + c + \ldots + e < 4^{\text{dr}} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 1.\ \text{III})$$

Volume du parallélipipède et du prisme :

$$\text{V} = \text{B} \times h \qquad (\text{n}^{\text{os}}\ 5, 6, 7, 9, 10)$$

Autre expression du volume du prisme oblique :

$$\text{V} = \text{S} \times a \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 8)$$

Projection d'une aire plane :

$$s = \text{S} \times \cos \alpha \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 11)$$

Volume de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} B \times h \qquad (\text{n}^0\ 12)$$

Volume du tronc de pyramide :

$$V = \frac{1}{3} h \left(B + b + \sqrt{Bb}\right) \qquad (\text{n}^0\ 13)$$

Volume du tronc de prisme triangulaire :

$$V = \frac{B\,(h + h' + h'')}{3} \qquad (\text{n}^0\ 14)$$

$$V = S\ \frac{(a + a' + a'')}{3} \qquad (\text{n}^0\ 15)$$

Rapport des volumes de deux polyèdres semblables :

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3 \qquad (\text{n}^0\ 17)$$

Aire de la surface latérale du cylindre droit :

$$S = 2\,\pi R h \qquad (\text{n}^0\ 18)$$

Aire de la surface totale du cylindre droit :

$$\Sigma = 2\,\pi R\,(h + R) \qquad (\text{n}^0\ 19)$$

Volume du cylindre à base circulaire :

$$V = \pi R^2 h \qquad (\text{n}^0\ 20)$$

Aire de la surface latérale du cône droit :

$$S = \pi R a \qquad (\text{n}^0\ 21)$$

Aire de la surface totale du cône droit :

$$\Sigma = \pi R (a + R) \qquad (n^0\ 22)$$

Volume du cône à base circulaire :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \qquad (n^0\ 23)$$

Aire de la surface latérale du cône droit :

$$S = \pi\ (R + R')\ a \qquad (n^0\ 24)$$

Aire de la surface totale du cône droit :

$$\Sigma = \pi (R + R')\ a + \pi\ (R^2 + R'^2) \qquad (n^0\ 25)$$

Volume du tronc de cône à bases circulaires :

$$V = \frac{1}{3} \pi h\ (R^2 + R'^2 + RR') \qquad (n^0\ 26)$$

Aire de la surface engendrée par une ligne polygonale tournant autour d'un axe passant par son centre, situé dans son plan et ne la traversant pas :

S = cercle inscrit × projection de la ligne (n° 27)

Aire de la zone :

$$S = 2\ \pi R h \qquad (n^0\ 28)$$

Aire de la sphère :

$$S = 4\ \pi R^2 \qquad (n^0\ 29)$$

Volume engendré par un triangle ABC autour

d'un axe passant par A, situé dans son plan et ne le traversant pas :

$$V = \frac{1}{3} AH \times \text{surf. } (BC) \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 30)$$

Volume engendré par un secteur polygonal régulier OABCD tournant autour d'un axe passant par O situé dans son plan et ne le traversant pas :

$$V = \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2 + ad \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 31)$$

Volume du secteur sphérique :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 32)$$

Volume de la sphère :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 33)$$

Volume de l'anneau sphérique :

$$V = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^2 \times A'B' \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 34)$$

Volume du segment sphérique à deux bases :

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h \left(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2\right) \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 35)$$

Volume du segment sphérique à une base :

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3\ R - h) \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 36)$$

TRIGONOMÉTRIE

§ I

Préliminaires.

1. Relation entre les fonctions circulaires d'un même arc. On a :

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = OM^2 \text{ ou } (1)\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP} \qquad (2)\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{BS}{OB} = \frac{QM}{OQ} \qquad (3)\ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

En plaçant le point M dans tous les quadrants, on voit que ces formules sont vraies en signe.

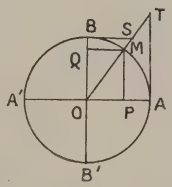

Fig. 1

2. Valeur des lignes des arcs $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

La figure montre que le sinus PM d'un arc AM est

la moitié de la corde MM′ de l'arc double. Ainsi $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, cos de $60^0 = \frac{1}{2}$.

Les formules (1) et (2) donnent ensuite cos 30^0 et tg 30^0.

Fig. 2

$$(4)\quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

3. Formule de Chasles entre des points en ligne droite A, B, C,... K, L, dans un ordre quelconque.

$$(7)\qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{LA} = 0$$

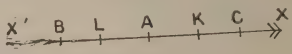

Fig. 3

Démonstration : Un mobile partant de A pas

sant successivement en B, C, ...L et revenant de L en A, a un déplacement nul entre les points de départ et d'arrivée; donc entre les nombres algébriques qui mesurent les vecteurs AB, BC, LA on a la relation :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots \overline{KL} + \overline{LA} = 0$$

ou :

$$\overline{AL} = \overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL}.$$

4. **Théorème des projections.** — La somme algébrique des projections $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{kl}$ des vecteurs d'un contour ABC...KL sur un axe orienté égale à la projection de la résultante AL.

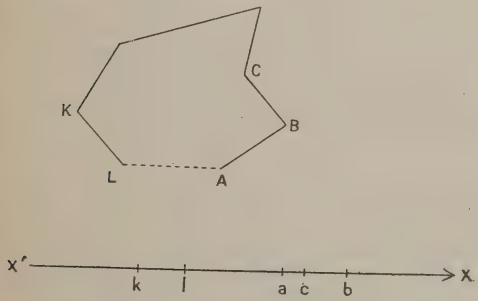

Fig. 4-5

Démonstration : Soit l'axe X'X orienté, c'est-à-

dire pourvu d'un sens positif X'X et d'un sens négatif ; la relation à démontrer :

$$al = ab + bc + \ldots + kl$$

n'est autre que la formule de *Chasles* entre les points $a, b, \ldots l$.

5. Valeur de la projection orthogonale $\overline{ab}$ d'un vecteur AB.

(8) $\overline{ab} = \overline{AB} \times$ projection am du vecteur unité.

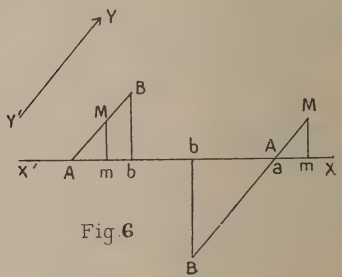

Fig. 6

Démonstration : Les projections d'un vecteur su deux axes parallèles étant égales, on peut considé rer l'axe de projection comme passant par l'origin A du vecteur. Soit Y'Y l'axe orienté parallèle au vecteur et fixant son signe. Marquons la projectio $\overline{am}$ du vecteur unité $\overline{AM} = +1$. On a :

Quel que soit le signe de AB,

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{am}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{am}}{+1}$$

d'où :

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times \overline{am}$$

6. **Autre énoncé.**

(9) $$\overline{ab} = \overline{AB} \times \cos (X'X, Y'Y)$$

Démonstration : En effet, $\overline{am}$ est, par définition du cosinus, le cosinus des directions positives du vecteur et de l'axe de projection.

§ II

Addition et multiplication des arcs.

7. **Formule d'addition pour le cosinus.**

(10) $$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Démonstration : Soient M l'extrémité de l'arc a porté à partir de A, N l'extrémité de l'arc b, porté à partir de M, l'arc $a + b$ a pour origine A et pour extrémité N. Menons Oy' tel que l'arc trigonomé-

trique $\widehat{MC}$ soit égal à $+\frac{\pi}{2}$. $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont les vecteurs unités relatifs à $\overline{OP} = \cos b$ et $\overline{PN} = \sin b$.

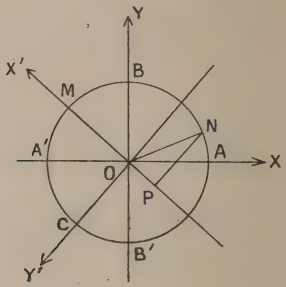

Fig. 7

En projetant sur AA' on a :

$$(\alpha) \text{ proj. } ON = \text{proj. } \overline{OP} + \text{proj. } \overline{PN}.$$

Or proj. ON est $\cos(a+b)$ par définition et d'après les nos 5 et 6 on a :

$$\text{proj. } \overline{OP} = \cos b \times \text{proj. } \overline{OM} = \cos b \cos a$$

$$\text{proj. } \overline{PN} = \sin b \times \text{proj. } \overline{OC} = \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$$

$$= -\sin b \sin a.$$

La formule (α) devient donc :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

8. Autres formules d'addition.

(11) $\cos a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(12) $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

(13) $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

(14) $$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

(15) $$\operatorname{tg} (a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Démonstration : Pour avoir la formule (11) changer b en $-b$ dans (10) Pour avoir (12) remplacer a par $\frac{\pi}{2} - a$ dans (11), on a :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

ou :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Pour avoir (13) changer b en $-b$ dans (12).

Pour obtenir (14) diviser (12) par (10) :

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

puis diviser par $\cos a \cos b$ les deux termes du second membre.

On déduit (15) de (14) en changeant b en $-b$.

9. Formules de multiplication.

(16) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$

(17) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$

(18) $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$

Démonstration : Il suffit de supposer $b = a$ dans (12), (10) et (14).

10. Expressions rationnelles de sin a et cos a en fonction de tg $\frac{a}{2}$.

(19) $$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

(20) $$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Démonstration : Les formules (16) et (17) donnent :

$$\begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \\ \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Ce qu'on peut écrire, en tenant compte de (1) :

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

Divisant les deux termes des seconds membres par $\cos \frac{a}{2}$, on obtient (19) et (20).

Divisant membre à membre (19) et (20), on a les expressions de tg a et cot a.

On peut expliquer *a priori* pourquoi l'on ne trouve qu'une seule valeur pour les lignes trigonométriques de l'arc a.

Les arcs $\frac{a}{2}$ qui ont une tangente donnée sont compris dans la formule :

$$\frac{a}{2} = K\pi + \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux. On en déduit:

$$a = 2\,k\pi + 2\,\alpha$$

qui prouve que tous les arcs a correspondants ont la même extrémité, et par suite les mêmes lignes.

§ III

Division des arcs.

11. Calcul de $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos a = b$.

Des relations :

$$\begin{cases} \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = \cos a \\ \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1. \end{cases}$$

on tire :

$$\begin{cases} 2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a \\ 2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a, \end{cases}$$

d'où quatre solutions :

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \\ \sin\frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \\ \sin\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \\ \sin\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \\ \sin\frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \end{cases}$$

On peut s'expliquer *a priori* ces quatre solutions. A $\cos a = b$, correspondent les arcs :

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

α étant l'un quelconque des arcs dont le cosinus vaut b. On en tire :

$$a = k\pi \pm \frac{\alpha}{2}.$$

La série d'arcs $a = k\pi + \frac{\alpha}{2}$ donne :

$$\begin{cases} \cos a = \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin a = \sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \text{ si } k \text{ pair,}$$

$$\begin{cases} \cos a = -\cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin a = -\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \text{ si } k \text{ impair.}$$

La série d'arcs $a = k\pi - \frac{\alpha}{2}$ donne :

$$\begin{cases} \cos a = \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin a = -\sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \text{ si } k \text{ pair,}$$

$$\begin{cases} \cos a = -\cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin a = \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \text{ si } k \text{ impair,}$$

Le problème n'a plus qu'une solution et on peut faire le choix de la solution lorsque l'arc a est précisé. Soit donné $\cos 780^0 = \frac{1}{2}$; l'arc $\frac{780^0}{2}$ ou 390^0 est terminé au premier quadrant, donc il faut prendre :

$$\begin{cases} \cos 390^0 = +\sqrt{\dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ \sin 390^0 = -\sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

12. Calcul de tg $\frac{a}{2}$ en fonction de tg a.

La formule (18) donne :

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

d'où :

$$(\beta) \quad \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = o.$$

On voit que le problème a toujours deux solutions dont le produit est, quel que soit a, la constante :

$$-\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a} \text{ ou } -1.$$

On peut expliquer ces résultats *a priori*.

Tous les arcs a qui ont une tangente donnée sont compris dans la formule :

$$a = k\pi + \alpha,$$

d'où :

$$\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Si k pair, on a :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Si k impair, on a :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Le problème a une seule solution et on peut faire le choix de la solution quand l'arc a est précisé.

Lorsque l'arc $\frac{a}{2}$ sera terminé au 1er ou au 3e quadrant, on prendra la racine positive en tg $\frac{a}{2}$ de l'équation (β), sinon on prendra la racine négative.

§ IV

Expressions rendues logarithmiques.

13. Transformation de la somme ou différence de deux sinus ou cosinus.

Additionnant et retranchant (10) et (11), (12) et (13) on a les formules :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b) \\ -2\sin a\sin b = \cos(a+b)-\cos(a-b) \\ 2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b) \\ 2\sin b\cos a = \sin(a+b)-\sin(a-b) \end{array}\right.$$

qui permettent la transformation d'un double produit de sinus ou cosinus en une somme ou différence, *transformation souvent utile dans les résolutions de systèmes d'équations.*

Dans (21) remplaçons a par $\frac{p+q}{2}$ et b par $\frac{p-q}{2}$ on obtient sous une forme commode les formules

qui transforment en produit une somme ou différence de sinus ou cosinus :

$$(22)\left\{\begin{aligned}
\cos p+\cos q&=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p-\cos q&=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\
\sin p+\sin q&=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p-\sin q&=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.
\end{aligned}\right.$$

14. Transformation d'une somme ou différence de deux tangentes.

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

15. Expression $S = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta)$.

Il s'agit de la mettre sous la forme $c \cos(\omega t + \varphi)$. Nous supposerons a au plus égal à b en valeur absolue pour fixer les idées.

Nous écrivons $S = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \alpha + \beta - \alpha)$ ou d'après (10) :

$$\begin{aligned}
S &= a\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\beta-\alpha)\cos(\omega t+\alpha)\\
&\quad - b\sin(\beta-\alpha)\sin(\omega t+\alpha)\\
&=\left[\frac{a+b\cos(\beta-\alpha)}{b\sin(\beta-\alpha)}\cos(\omega t+\alpha)\right.\\
&\quad \left.-\sin(\omega t+\alpha)\right] b\sin(\beta-\alpha).
\end{aligned}$$

On peut calculer φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{b}$, il vient:

$$S = \left[\frac{\cos\varphi + \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \cos(\omega t + \alpha) - \sin(\omega t + \alpha)\right] b \sin(\beta - \alpha)$$

$$= \left[\frac{2\cos\frac{\varphi + \beta - \alpha}{2} \cos\frac{\varphi + \alpha - \beta}{2}}{\sin(\beta - \alpha)} \cos(\omega t + \alpha) - \sin(\omega t + \alpha)\right] b \sin(\beta - \alpha).$$

On peut calculer θ tel que :

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{2\cos\frac{\varphi + \beta - \alpha}{2} \cos\frac{\varphi + \alpha - \beta}{2}}{\sin(\beta - \alpha)}$$

et l'on trouve :

$$S = \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cos(\omega t + \alpha) - \sin(\omega t + \alpha)\right] b \sin(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{b \sin(\beta - \alpha)}{\sin\theta} \cos(\omega t + \alpha + \theta)$$

qui est de la forme $c \cos(\omega t + \varphi)$.

§ V

Equations trigonométriques.

16. Equation $a \cos x + b \sin x = c$.

Procédé à employer lorsque l'équation est entièrement numérique.

On pose :

$$\begin{cases} \pi \cos \varphi = a \\ \pi \sin \varphi = b ; \end{cases}$$

on en déduit π par la formule :

$$\pi^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 + b^2,$$

d'où :

$$\pi = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et l'on a ensuite φ.

L'équation devient :

$$\pi (\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi) = c$$

d'où :

$$\cos (x - \varphi) = \frac{c}{\pi} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

La valeur de $\cos (x - \varphi)$ est admissible si $c^2 < a^2 + b^2$ et l'on trouve pour $x - \varphi$ et pour x deux séries d'arcs de la forme :

$$x - \varphi = 2 k\pi \pm \alpha, \; x = 2 k\pi \pm \alpha + \varphi .$$

Procédé à employer lorsque l'équation renferme un paramètre.

On remplace $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ au moyen des formules (19) et (20) et l'on tombe sur une équation du 2e degré que l'on discute :

$$(a + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 b \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - a = o.$$

17. Equation $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$.

En général, cette équation n'est pas purement numérique, on la résout en la rendant *homogène* par rapport à $\sin x$ et $\cos x$. On l'écrit

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

On divise les deux membres par $\cos^2 x$ et l'on a :

$$(a - d) \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c - d = o.$$

équation du 2e degré que l'on discute.

§ VI

Triangles rectangles.

18. Relations entre les éléments d'un triangle rectangle.

$$(23) \begin{cases} b = a \cos C = a \sin B \\ c = a \cos B = a \sin C \end{cases}$$

$$(24) \begin{cases} b = c \operatorname{tg} B = c \cot C \\ c = b \operatorname{tg} C = b \cot B. \end{cases}$$

Démonstration : Dans le triangle ABC rectangle en A, AB est la projection de BC sur AB donc (n° 6) on a : $c = a \cos B$.

Comme $c = 90^0 - B$, on a aussi $c = a \sin C$.

Divisant l'une par l'autre les formules (23) on obtient (24).

Ces formules permettent de résoudre immédiatement un triangle rectangle connaissant deux de ses éléments dont au moins un côté.

§ VII

Triangles quelconques.

19. **Premier groupe de relations entre les éléments d'un triangle quelconque.**

$$(25)\quad \begin{cases} A + B + C = 180^0 \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \end{cases}$$

R rayon du cercle circonscrit O.

Démonstration : Le triangle rectangle BOM donne (23) :

$$BM = BO \sin BOM$$

ou :

$$\frac{a}{2} = R \sin A$$

d'où :

$$\frac{a}{\sin A} = 2\,R.$$

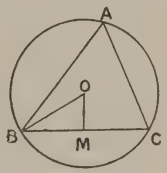

Fig. 8

De même pour :

$$\frac{b}{\sin B} \text{ et } \frac{c}{\sin C}.$$

La première formule (25) est démontrée en géométrie.

20. **Deuxième groupe de relations.** Ce

groupe n'a aucune utilité pratique ; il ne faut pas l'employer dans les résolutions de triangle.

$$(26)\quad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

Démonstration : BC est la projection sur BC de la résultante BC du contour BAC donc (n°s 4 et 6) on a :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

21. **Troisième groupe de relations :**

$$(27)\quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C. \end{cases}$$

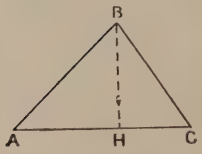

Fig. 9

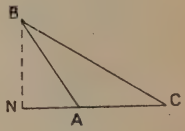

Fig. 10

Démonstration : Mener la hauteur BH ; appliquer le théorème relatif au carré d'un côté opposé à un angle aigu ou obtus, en remarquant que :

$$AH = c \cos A, \text{ si } A < 90^\circ ;$$
$$AH = -\,c \cos A, \text{ si } A > 90^\circ.$$

22. Si dans la résolution d'un triangle on s'est servi de tout le groupe (25) ou même d'une seule des formules (27) il sera *inutile* dans la discussion d'exprimer qu'un côté est compris entre la somme et la différence des deux autres.

Nous ne démontrerons pas ce fait, puisqu'il ne peut être invoqué que dans le problème de l'examen écrit.

23. **Premier cas de résolution**. On connaît a, B, C. On a :

$$(25)\ A = 180 - (B + C),\ b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

24. **Deuxième cas** : on connaît b, c, A. Des formules (25) on déduit :

$$\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$= \frac{b + c}{\sin B + \sin C} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C}$$

$$(\text{n}^\circ 13) = \frac{b + c}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}$$

$$= \frac{b - c}{2 \sin \frac{B - C}{2} \cos \frac{B + C}{2}}$$

Des deux derniers rapports on tire :

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}.$$

Connaissant $\frac{B+C}{2}$ et $\frac{B-C}{2}$ on déduit B, C, et ensuite a.

25. **Troisième cas.** — **Cas douteux.** — On connaît a, b, A. Grâce aux formules (25) on a successivement :

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}\ ;C=180^\circ-A-B;c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Discussion : Si $b\sin A<a$, à la valeur de sin B correspondent un angle aigu B′ et un angle obtus B″ = 180° — B′ ; d'où pour C les valeurs correspondantes :

$$C'=180-A-B'=B''-A,$$
$$C''=180-A-B''=B'-A.$$

Si $A>90^\circ$, C″ est <0 et ne convient pas ; pour que C′ convienne il faut :

$$B'<180-A,\text{ d'où }\sin B'<\sin A$$

c'est-à-dire $b\frac{\sin A}{a}<\sin A$, et enfin $b<a$. Si $A<90^\circ$ C′ est >0 et convient ; pour que C″ convienne, il faut :

$$B' > A, \text{ d'où } \sin B' > \sin A,$$

est-à-dire $\dfrac{b \sin A}{a} > \sin A$ et enfin $b > a$.

En résumé :

$$\begin{cases} b < a \text{ 1 sol. quelque soit A} \\ b \sin A < a < b, \ A < 90^0 \text{ 2 sol.} \end{cases}$$

26. **Quatrième cas**. On connaît a, b, c. La remière formule (27) donne :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

ppliquant les résultats du n° 11, on a :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2\,bc}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc} = \frac{(a + c - b)(a + b - c)}{2\,bc}$$

l'on pose $a + b + c = 2\,p$, on en tire :

$$(28) \begin{cases} \cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p\,(p - a)}{bc}} \\ \sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - b)(p - c)}{bc}} \end{cases}$$

d'où :

$$\text{(29)} \qquad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

27. **Expression de l'aire d'un triangle**

$$\text{(30)} \qquad S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

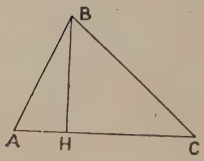

Fig. 11

Démonstration : Le triangle rectangle ABH donne :

$$BH = c \sin A.$$

Il vient :

$$S = \frac{1}{2} b \times BH$$
$$= \frac{1}{2} bc \sin A.$$

28. **Autre expression de l'aire d'un triangle :**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Démonstration : On a (n° 9) :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

ou en se servant des formules (28) :

$$S = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

TRIGONOMÉTRIE

Arcs a *correspondants à un sinus donné :*

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\,k\pi \\ a = \pi - \alpha + 2\,k\pi \end{cases}$$ (non démontrées dans le livre).

étant l'un quelconque des arcs ayant le sinus onné :

Arcs a *correspondant à un cosinus donné :*

$a = 2\,k\pi \pm \alpha$ (non démontrée dans le livre).

Arcs a *correspondants à une tangente donnée :*

$a = K\pi + \alpha$ (non démontrée dans le livre).

Relations entre les lignes d'un même arc :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ (Démonstration au n° 1).

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ligne des arcs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

formules énoncées au n° 2.

Formules de Chasles :

$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + LA = 0$ (démonstr. au n° 3).

Valeur de la projection orthogonale d'un vecteur :

$\overline{ab} = \overline{AB} \times$ projection du vecteur unité (n° 5)

$\overline{ab} = \overline{AB} \times \cos(X'X, Y'Y)$ (n° 6)

Formules d'addition :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases} \text{(n° 7}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases} \quad (\text{n}^\circ 8)$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\ \operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \end{cases}$$

Formules de multiplication :

$$\begin{cases} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{cases} \quad (\text{n}^0\ 9)$$

Expressions de sin a *et cos* a *en fonction de* $g \frac{a}{2}$.

$$\begin{cases} \sin a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \\ \cos a = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \end{cases} \quad (\text{n}^0\ 10)$$

Formules de division :

$$\begin{cases} \cos^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 + \cos a}{2} \\ \sin^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 - \cos a}{2} \end{cases} \quad (\text{n}^0\ 11)$$

Transformations de produits de cosinus ou sinu en sommes ou différences de sinus ou cosinus. For mules de transformations inverses :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b) \\ 2\sin a\sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ 2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b) \\ 2\sin b\cos a = \sin(a+b)-\sin(a-b) \end{array}\right. \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 13$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 13 \\ \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2} \end{array}\right.$$

Formules dans le triangle rectangle :

$$\left\{\begin{array}{l} b = a\cos C = a\sin B \\ c = a\cos B = a\sin C \\ b = c\ \mathrm{tg}\ B = c\cot C \\ c = b\ \mathrm{tg}\ C = b\cot B \end{array}\right. \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 18)$$

Formules dans un triangle quelconque :

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\,R \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 19)$$

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 20)$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C \end{cases} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 21)$$

Formules établies dans le 4e cas de résolution des triangles :

$$\begin{cases} \cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p\,(p-a)}{bc}} \\ \sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)\,(p-c)}{bc}} \end{cases} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 26)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

Diverses expressions de l'aire d'un triangle :

$S = pr$ Démontrée en géométrie.

$$S = \frac{1}{2}\,bc \sin A \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 27)$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 28)$$

ALGÈBRE

§ I

Equation et trinôme du second degré.

1. Résolution des équations.

$f(x) = ax^2 + bx + c = o$ et $ax^4 + bx^2 + c = o$.

On écrit $f(x)$ successivement :

$$f(x) \equiv a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = o,$$

$$f(x) \equiv a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = o$$

$$(\alpha)\ f(x) \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = o$$

1° Si le descriminant $b^2 - 4ac$ est $< o$ le cro chet de l'équation (α) ne peut jamais s'annuler ; i n'y a aucune racine.

2° Si $b^2 - 4ac = o$ l'équation (α) devient :

$$f(x) \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = o$$

lle n'est vérifiée que pour $x = -\frac{b}{2a}$. On con-
ient de dire qu'il y a deux racines égales à $-\frac{b}{2a}$.

3° Si $b^2 - 4ac > o$. On peut extraire la racine
arrée de $b^2 - 4ac$ et écrire l'équation « successi-
ement :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = o,$$

$$(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = o.$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = o.$$

Posons :

$$' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

l viendra :

$$f(x) = a(x - x')(x - x'') = o$$

t l'on voit qu'il y a deux racines ; les nombres
x' et x'', qu'on réunit en un même symbole :

$$(1) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ce symbole pour l'équation $x^2 + px + q = o$, est :

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

On résout l'équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = o$ en posant $x^2 = y$, il vient :

$$ay^2 + by + c = o,$$

d'où :

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

et ensuite $x = \mp \sqrt{y}$.

2. **Relations entre les coefficients et les racines.**

$$(2) \begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

On les obtient en additionnant et en multipliant les valeurs de x' et x'' obtenus dans le 3e du nº 1.

3. **Signes des racines de l'équation du 2e degré.** Si $\frac{c}{a} < o$, inutile de former $b^2 - 4ac$, il y a deux racines de signes contraires :

$$\text{Si } b^2 - 4ac > o \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > o \text{ deux rac.} > o \\ -\dfrac{b}{a} < o \text{ deux rac.} < o. \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} > o$$

4. **Choses à retenir**. — Dans un problème sur les racines d'une équation du 2e degré, il faut se servir des relations (2) et non de (1).

Ainsi, supposons qu'on propose de trouver λ de façon que les racines de $x^2 - 6\lambda x + 8\lambda = o$ satisfassent à $3x' - x'' = 2$.

On écrira les trois relations :

$$\begin{cases} 3x' - x'' = 2 \\ x' + x'' = 6\lambda \\ x'x'' = 8\lambda, \end{cases}$$

on tirera x' et x'' des deux premières et on portera leurs valeurs dans la 3e.

5. **Théorème fondamental sur le signe du trinôme**. *Le trinôme n'est de signe contraire au coefficient* a *de son premier terme que s'il a deux racines distinctes et que l'on donne à* x *une valeur comprise entre les deux racines.*

1° Si $b^2 - 4ac > o$, le trinôme $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ peut (n° 11) s'écrire :

$$f(x) \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

le crochet est une somme de deux quantités positives, et $f(x)$ est toujours du signe de a.

2° Si $b^2 - 4ac = o$ le trinôme (n° 1, 2e) s'écrit :

$$f(x) \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2;$$

il s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$ et reste du signe de a, pour toute autre valeur de x.

Si $b^2 - 4ac > o$ le trinôme (no 1, 3e) s'écrit :

$$f(x) \equiv a(x - x')(x - x'').$$

Le produit $(x - x')(x - x'')$ n'est négatif et le trinôme n'est de signe contraire à a que pour des valeurs de x comprises entre x' et x''.

§ II

Dérivées.

6. Dérivée d'une somme $y = u + v - w$.

(3) $$y' = u' + v' - w'.$$

Démonstration : Donnons à x l'accroissement Δx ; u, v, w, y, prennent les accroissements Δu, Δv, Δw, Δy et l'on a :

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

d'où :

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

et :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

A la limite on a :

$$y' = u' + v' - w'.$$

7. **Dérivée de** $z = uv$, $y = uvw$.

) $z = uv' + vu'$, $y' = uvw' + uwv' + vwu'$.

Démonstration: Donnons à x' l'accroissement Δx ; , v et z prennent les accroissements Δu, Δv, Δz et on a :

$$y + \Delta z = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$= uv + v\Delta u + (u + \Delta u)\Delta v ;$$

'où :

$$\Delta z = v\Delta u + (u + \Delta v)\Delta v$$

 :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

A la limite on a :

$$z' = vu' + uv'.$$

Passons à $y = uvw$. Je le mets sous la forme de eux facteurs :

$$y = (uv)w,$$

l'où :

$$y' = (uv)w' + w(uv)',$$

'est-à-dire :

$$y' = uvw' + w(uv' + vu').$$

8. **Généralisation. Dérivée de** $y = uvw \ldots st$

$$(5) \qquad y' = uvw \ldots st' + uvw \ldots s't + \ldots + uv'w \ldots st + u'vw \ldots st.$$

Démonstration : De deux facteurs nous avon passé à trois facteurs ; de même d'un produit d trois facteurs, on passera à un produit de quatr facteurs, etc.

9. **Dérivée de** $y = u^m$.

$$(6) \qquad y' = mu^{m-1} \times u'_x.$$

Démonstration : Faire $u = v = w = \ldots = s =$ au n° 8. En particulier la dérivée de $y = x^m$ es $y' = mx^{m-1}$.

10. Dérivée de $y = \dfrac{u}{v}$.

$$(7) \qquad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Démonstration : Donnons à x l'accroissemen Δx ; u, v et y prennent les accroissements Δu, Δv, Δy et l'on a :

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

d'où :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v + \Delta v)}$$

A la limite on a :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}\ .$$

11. **Dérivées de $y = \sin u$ et $z = \cos u$.**

(8) $$y' = \cos u \times u'_x,$$

(9) $$z' = -\sin u \times u'_x.$$

Démonstration : Donnons à x l'accroissement Δx, v, y et z prennent les accroissements Δu, Δv, , Δz, et l'on a :

$$y + \Delta y = \sin\,(u + \Delta u),$$
$$z + \Delta z = \cos\,(u + \Delta u).$$

D'où :

$$y = \sin(u + \Delta u) - \sin u,\ \Delta z = \cos(u + \Delta u) - \cos u;$$

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right),$$

$$\Delta z = -2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} \times \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} \times \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Or on sait (nous l'admettons) que :

$$\lim. \frac{\sin a}{a} = 1$$

quand a tend vers o ; on a donc à la limite :

$$y' = 1 \times \cos u \times u'_x \quad z' = -1 \times \sin u \times u'_x.$$

En particulier on a :

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

12. **Dérivées de $y = \text{tg}\, u$ et $z = \cot u$.**

(10) $$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \times u'_x.$$

(11) $$z' = -\frac{1}{\sin u^2} \times u'_x.$$

Démonstration : Remplacer tg u par $\frac{\sin u}{\cos u}$ et appliquer la formule (7). De même pour cot u.

En particulier on a :

$$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ III

Signification géométrique de la dérivée. Variations de fonctions.

13. **Signification géométrique de la dérivée.** — Soit C la courbe représentative de l'équation $y = f(x)$.

Soient M un point quelconque de coordonnées $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$ et M′ un point voisin de coordonnées $OP' = x + \Delta x$, $\overline{P'M'} = y + \Delta y$.

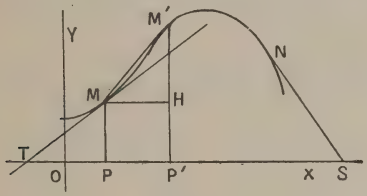

Fig. 1

Menons MH parallèle à ox : le triangle rectangle MHM′ donne :

$$\operatorname{tg} \widehat{M'MH} = \frac{HM'}{HM} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

d'où à la limite :

$$\operatorname{tg} \widehat{MTx} = y' = f'(x).$$

La valeur de la dérivée pour le point M est égale à la tangente x *de l'angle que forme la tangente en M à la courbe avec la direction positive de l'axe des* x.

14. **Variations des fonctions d'après le signe de la dérivée.** — Dans le voisinage de M on constate que y croît avec x et que $y' = \operatorname{tg} \widehat{MTx}$ est positive ; au contraire dans le voisinage de N, y décroît quand x croît et l'on constate que y' est négative. Le signe de y' fait donc connaître le sens de la variation de y.

15. **Exemple. Variations de** $y = ax^2 + bx + c$. On a :

$$y' = 2\,ax + b = 2\,a\left(x + \frac{b}{2a}\right).$$

Le signe de y' dépend de a ; donc deux cas à distinguer : $a > o$, $a < o$. Supposons par exemple : $a > o$, on a le tableau et les paraboles suivantes dans le tracé desquelles nous supposons :

$$-\frac{b}{2\,a} > o.$$

x	$-\infty$	. . . . .		$-\dfrac{b}{2a}$		. . . . .		$+\infty$
y'	$-\infty$	. . . .	$-$	. . . . .	o	. . . . .	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	. . . .	décr. . .	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ min.		. . . cr. . . .		$+\infty$

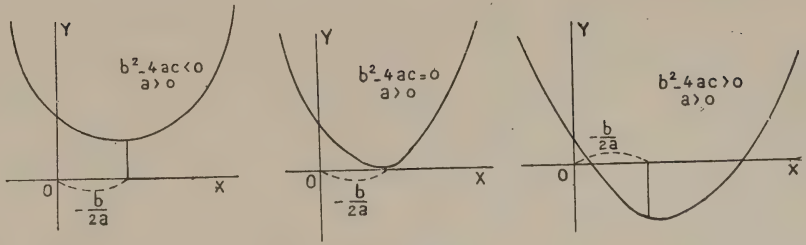

Fig. 2

Pour $x = \pm\infty$, $y = x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$ prend même valeur que ax^2.

On traiterait de façon analogue le cas $a < o$.

La conclusion est la suivante :

$$(12)\quad \begin{cases} \text{Si } a > o, \text{ il y a un minimum égal à } \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a} \text{ pour } x = -\dfrac{b}{2\,a}\,; \\ \text{Si } a < o, \text{ il y a un maximum égal à } \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a} \text{ pour } x = -\dfrac{b}{2\,a}\,. \end{cases}$$

D'ailleurs le trinôme étant mis (n° 1) sous la forme :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{4\,ac - b^2}{4\,a^2}\right].$$

On voit qu'il prend la même valeur pour deux valeurs $= -\frac{b}{2\,a} \pm h$ quelconques équidistantes de $-\frac{b}{2\,a}$.

16. Exemple. Variations de $y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$.

On a :

$$(7)\quad y' = \frac{(a'x + b')\,a - (ax + b)\,a'}{(a'x + b')^2} = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$$

y' garde un signe constant, celui de $ab' - ba'$ d'où deux cas à distinguer :

$$ab' - ba' > o, \qquad ab' - ba' < o.$$

Supposons par exemple $ab' - ba' > o$. On a le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{b'}{a'}$	$+\infty$
y'	$o\ +$	$+\infty \mid +\infty$	o
y	$\frac{a}{a'}$	$+\infty \mid -\infty$	$+\frac{a}{a'}$

La courbe est une *hyperbole équilatère*.

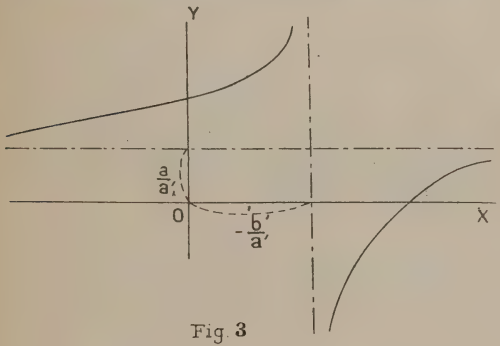

Fig. 3

Nous avons dans le tracé de la courbe supposé :

$$\frac{a}{a'} > o \text{ et } -\frac{b'}{a'} > o.$$

Pour $x = \pm \infty$, on voit que y mis sous la forme

$$\frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}} \text{ prend la valeur } \frac{a}{a'}.$$

On traiterait de façon analogue le cas $ab' - ba' < o$. Si $ab' - ba' = o$, y' est constamment nulle, y ne croît ni décroît : y garde la valeur constante $\frac{a}{a'}$.

On observera que la fraction du premier degré n'a ni maximum ni minimum.

§ IV

Vitesse et accélération dans un mouvement rectiligne. Mouvement uniformément varié.

17. Vitesse dans le mouvement $x = f(t)$.

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t). \tag{13}$$

Soient :

$$x = \overline{OM} = f(t), x + \Delta x = \overline{OM'} = f(t + \Delta t)$$

les abscisses de deux positions voisines du mobile sur l'axe orienté X'X.

La vitesse à l'instant t est par définition le vecteur $\overline{MT}$ porté dans le sens du mouvement ayant pour longueur $MT = \lim. \frac{\text{longueur } MM'}{\Delta t}$. Sa valeur algébrique v est $v = + MT$ ou $v = - MT$ selon que la longueur MT est dans le sens positif OX ou dans le sens négatif OX'.

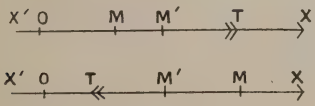

Fig 4

Dans la 1re figure, Δx est $> o$ on a :

$$\text{longueur } MM' = + \Delta x, MT = \lim. \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t$$

$$v = + MT = x'_t.$$

Dans la 2e figure, Δx est $< o$, on a :

$$\text{longueur } MM' = - \Delta x, MT = \lim. - \frac{\Delta x}{\Delta t} = - x'_t.$$

$$v = - MT = - (- x'_t) = x'_t.$$

Donc dans les deux cas on a :

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

18. Accélération w dans un mouvement rectiligne.

$$(14) \qquad w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t).$$

Soit un mobile M se déplaçant sur l'axe orienté X'X, et soit $\overline{MT} = f'(t)$ sa vitesse à l'époque t; portons sur un axe orienté parallèle X'_1X_1 un vecteur $\overline{O_1M_1}$ équipollent à $\overline{MT}$.

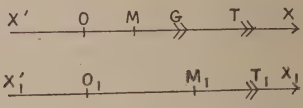

Fig. 5

Par définition, l'accélération $\overline{MG}$ du point M à l'instant t *est un vecteur équipollent à la vitesse $\overline{M_1T_1}$ du point M_1 à l'instant* t.

Donc (n° 17) la valeur algébrique w de l'accélération $\overline{MG}$ est :

$$w = \frac{d\,\overline{M_1T_1}}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

19. Mouvement rectiligne accéléré ou retardé.

Définition. — *Un mouvement rectiligne est dit*

accéléré lorsque v *croît en valeur absolue, c'est-à-dire lorsque* v^2 *croît et par suite lorsque la dérivée* $2vw$ *de* v^2 *est positive.*

Il est dit retardé dans le cas contraire.

20. Définition et équation du mouvement rectiligne uniformément varié.

On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié lorsque son accélération est une constante γ.

La dérivée de $\gamma t + v_o$ où v_o est une constante, étant γ on en conclut :

$$v = \gamma t + v_o$$

c'est la vitesse du mouvement considéré à l'époque t.

D'autre part la dérivée de $\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$ où x_o est une constante, étant $\gamma t + v_o$ il s'en déduit que la loi des espaces d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération γ est :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o.$$

21. Déplacement d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié.

Il s'agit d'étudier les variations du trinôme :

$$x = \frac{1}{2}\,\gamma\, t^2 + v_o t + x_o.$$

La dérivée est :

$$x'_t = v = \gamma\left(t + \frac{v_o}{\gamma}\right).$$

On sait (n° 15) qu'il faut distinguer deux cas : $\gamma > o$, $\gamma < o$. En supposant $\gamma > o$ on a le tableau :

x	$-\infty$	$-\dfrac{v_o}{\gamma}$	$+\infty$
v	$-\infty$	$-\ o\ +$	$+\infty$
x	$+\infty$	$\dfrac{2\,\gamma x_o - v^2_o}{2\,\gamma}$ minimum	$+\infty$
$2v\gamma$	$-$		$+$

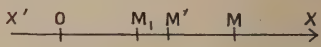

Fig. 6

Le mobile vient sur sa trajectoire X'X d'un mouvement retardé depuis l'infini à droite jusqu'à une position M, telle que $\overline{OM_1} = \dfrac{2\,\gamma x_o - v^2_o}{2\,\gamma}$ puis retourné à l'infini à droite d'un mouvement accéléré.

On sait (n° 15) qu'un trinôme $at^2 + bt + c$ prend la même valeur pour deux valeurs de t équidistantes de $t = -\dfrac{b}{2\,a}$ qui est ici $t = -\dfrac{v_o}{\gamma}$.

Donc le mobile met le même temps pour aller de M′ en M_1, que pour revenir de M_1 en M′ ; de même il met le même temps pour aller de M en M_1 que pour revenir de M_1 en M : on en conclut que le mobile met le même temps sur un trajet quelconque MM′ à l'aller et au retour.

De plus, si on calcule v pour une position du mobile, c'est-à-dire en fonction de l'abscisse x, ce qu'on fait en tirant :

$$t = \frac{v - v_o}{\gamma} \text{ de } v = v_o + \gamma t$$

et en portant cette valeur de t dans le trinôme, on obtient :

$$x = \frac{1}{2} \gamma \frac{(v - v_o)^2}{\gamma^2} + \frac{v_o (v - v_o)}{\gamma} + x_o,$$

ou :

$$v^2 - v^2_o - 2 \gamma (x - x_o) = o$$

équation en v qui donne les valeurs de v aux deux passages du mobile en M. Ces valeurs de v :

$$v = \pm \sqrt{v^2_o + 2 \gamma (x - x_o)}$$

sont égales en valeur absolue.

ALGÈBRE

Trois identités utiles :

$$x^3 - a^3 \equiv (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^3 + a^3 \equiv (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$1^2 + 2^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Non démontrées dans le livre.

Formules de résolution de l'équation du 2e degré :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

(Démonstration n° 1)

Décomposition en facteurs du trinôme qui a deux racines :

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'') \quad (\text{n}^0\ 1)$$

Relations entre les coefficients et les racines :

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ x'x'' = \dfrac{c}{x} \end{cases} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 2)$$

Formules de dérivées :

$$y = u + v - w, \quad y' = u' + v' - w' \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 6)$$

$$y = uv, \quad y' = vu' + uv \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 7)$$

$$y = uvw \ldots st, \quad y' = uvw \ldots st' + uvw \ldots s't + \ldots + u'vw \ldots st \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 8)$$

$$\begin{cases} y = u^m \\ y = x^m \end{cases} \quad \begin{cases} y' = mu^{m-1} \times u' \\ y' = mx^{m-1} \end{cases} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 9)$$

$$y = \frac{u}{v} \quad y = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 10)$$

$$\begin{cases} y = \sin u \\ y = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \cos u \times u' \\ y' = \cos x \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \cos u \\ y = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} y' = -\sin u \times u' \\ y' = -\sin x \end{cases} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 11)$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} u \\ y = \operatorname{tg} x \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \times u' \\ y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 12)$$

$$\begin{cases} y = \cot u \\ y = \cot x \end{cases} \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \times u' \\ y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases} \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 12)$$

Variations du trinôme du 2e degré :

Si $a > o$, minimum égal à $\frac{4\,ac - b^2}{4\,a}$ pour $x = -\frac{b}{2\,a}$. (n° 15)

Si $a < o$, maximum égal à $\frac{4\,ac - b^2}{4\,a}$ pour $x = -\frac{b}{2\,a}$. (n° 15)

Vitesse et accélération dans un mouvement rectiligne $x = f(t)$:

$$v = x'_t$$
$$w = v'_t = x''_t \qquad (\text{n}^{\text{os}}\ 17 \text{ et } 18)$$

GÉOMÉTRIE COTÉE ET DESCRIPTIVE

§ I

Un seul plan de projections.

1. Rabattement sur un plan horizontal. — Soit à rabattre le plan P sur le plan horizontal.

Projetons A en *a* sur H et abaissons *a*B perpendiculaire sur la charnière CD ; BA sera (*th. des 3 perpendiculaires*) perpendiculaire à CD ; donc après le rabattement, A viendra en A′ tel que A′B *soit égale à l'hypoténuse du triangle rectangle AaB dont le côté AB est égal à la différence des cotes de A et de la charnière.*

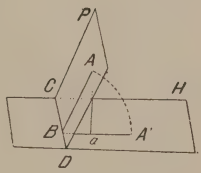

Fig. 1

2. Angle de deux droites $a_5 b_3$ et $a_5 c_3$. — On rabat le plan ABC autour de l'horizontale BC ;

le point A se rabat en A′ sur la perpendiculaire αa à la charnière ; à la distance αA′ égale (n° 1) à l'hypoténuse du triangle rectangle $\nu aa''$ où $aa'' = 5 - 3 = 2$. L'angle cherché est $\widehat{bA'c}$.

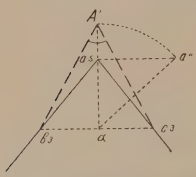

Fig. 2

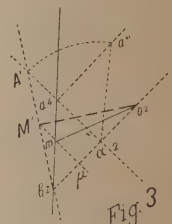

Fig. 3

3. **Distance OM d'un point o_2 à une droite a_4 b_2.** — La méthode consiste à rabattre le plan OAB autour de l'horizontale OB, à tracer la perpendiculaire OM dans le rabattement et à la relever. Le point a_4 se rabat en A′ sur la perpendiculaire $\alpha\nu$ à la charnière, à la distance αA′ égale à l'hypoténuse du triangle rectangle $\nu aa''$ où $aa'' = 4 - 2 = 2$. La droite AB est rabattue suivant A′b ; la longueur de la distance cherchée est la perpendiculaire OM′ à A′b. Enfin j'obtiens sa projection om en abaissant M′μ perpendiculaire à la charnière.

4. **Distance OM d'un point o_2 à un plan P défini par son échelle de pente a_2 b_4.** — Les horizontales AC, BD du plan P sont perpendicu-

laires à OM et à la verticale de MI, donc elles sont perpendiculaires au plan vertical passant par OM et par suite à la projection *om* de OM ; en d'autres termes *om* est parallèle à *ab*. OM est perpendiculaire, à la droite CD du plan P située avec elle dans

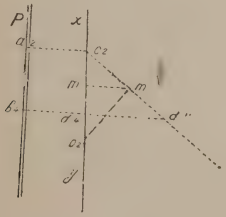

Fig. 4

le même plan vertical. Je rabats ce plan vertical autour de son horizontale *xy* de cote 2. Le point d_4 se rabat en d'' tel que $dd'' = 4 - 2 = 2$; CD et *o* se rabattent suivant cd'' et *o*. La distance cherchée a pour longueur la perpendiculaire om'' à cd'' ; en abaissant $m''m$ perpendiculaire à *xy* ; j'ai sa projection *om* et la cote $2 + mm''$ du point M.

5. **Angle de deux plans P et Q définis par leurs échelles de pente $a_2\ b_0$ et $c_2\ d_0$.** — A l'aide des horizontales 0 et 2, on marque l'intersection $m_0\ n_2$ des deux plans.

La projection *mn* est (n° 4) perpendiculaire à la

trace pq du plan d'un rectiligne pIq quelconque. La droite ωI est perpendiculaire à MN et située dans un même plan vertical avec elle ; si donc on rabat ce plan vertical autour de sa trace horizon-

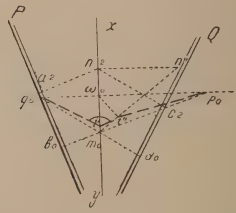

Fig. 5

tale xy, N se rabattra en n'' sur la perpendiculaire nn'' à xy à la distance nn'' égale à la cote de N ; MN sera rabattue en mn'' et ωI en $\omega i''$ perpendiculaire a mn''. On obtient l'angle cherché suivant $\widehat{pI'q}$ en portant $\omega I' = \omega i''$; car on forme un triangle $pI'q$ égal au triangle pIq de l'espace dont on connaît la longueur $\omega i''$ de la hauteur ωI.

§ II

Deux plans de projections.

6. **Angle de deux droites** ab, $a'b'$ **et** ac, $a'c'$. — Même principe qu'au n° 2. On rabat le plan

ABC autour de l'horizontale BC ; le rabat A se rabat en A′ au moyen du triangle rectangle $\alpha aa''$ tel

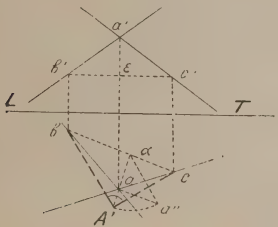

Fig. 6

que aa'' soit égal à la différence des cotes $\varepsilon a'$ entre A et la charnière BC. L'angle cherché est $\widehat{bA'c}$.

7. Distance d'un point oo' à une droite ab, $a'b'$.

Même principe qu'au n° 3. On rabat le plan OAB autour de l'horizontale OB ; le point A se rabat en A′ au moyen du triangle rectangle $\alpha aa'' = \varepsilon a'$; AB est rabattue suivant bA', et la distance cherchée suivant la perpendiculaire OM′ à bA'. En abaissant

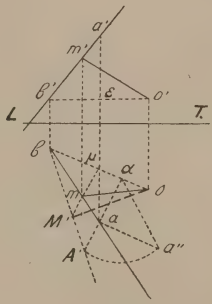

Fig. 7

M'μ perpendiculaire à ob ; on obtient la projection m du pied de la perpendiculaire OM ; on rappelle m en m'.

8. **Distance OM d'un point oo' à un plan PαQ'.** — Même principe qu'au n° 4. On sait (n° 4) que la projection om est orthogonale à la trace horizontale αP du plan PαQ'. Le plan vertical UV', qui passe par OM coupe le plan PαQ' suivant la droite cd, $c'd'$ à laquelle OM est perpendiculaire.

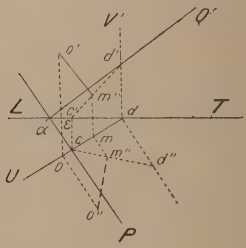

Fig. 8

Si on rabat le plan vertical UV' autour de sa trace U, les points O et D se rabattront sur les perpendiculaires oo' et dd'' à U, à des distances oo'' et dd'' égales à $\varepsilon o'$ et dd'', CD sera rabattue suivant cd' et la distance cherchée suivant $o''m''$ perpendiculaire à cd''. On obtient les projections m et m' de M en abaissant $m''m$ perpendiculaire sur cd et rappelant m en m'.

9. **Angle de deux plans quelconques** $P\alpha R'$ et $Q\beta S'$.

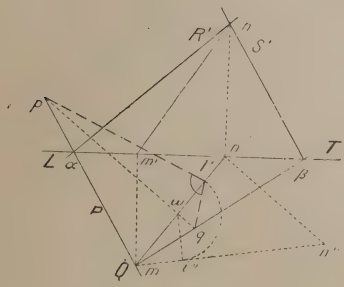

Fig. 9

Même principe qu'au n° 5. L'intersection des deux plans est mn, $m'n'$; sa projection mn est (n° 4), etc., etc. (textuellement comme au n° 5).

§ III

Questions de moindre importance.

10. *Pente d'une droite.* — C'est le rapport de la différence des cotes de deux points de la droite à la distance des projections horizontales des mêmes points.

C'est aussi la tangente de l'angle de la droite avec le plan horizontal.

11. *Intervalle d'une droite.* — C'est l'inverse de la pente.

12. *Droites concourantes.* — Si les cotes du point M de AB et du point N de CD sont égales

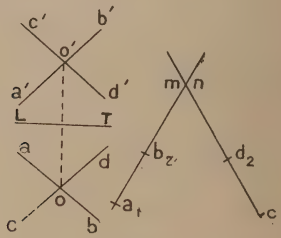

Fig. 10

(cotée) ou si o et o' sont sur une même ligne de rappel (descriptive), AB et CD se coupent.

13. *Droites parallèles,* — Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux droites AB et CD soient parallèles sont que leurs projections soient parallèles, leurs intervalles soient égaux et que leurs cotes croissent dans le même sens (cotée).

1° Les conditions sont nécessaires. Soient les droites parallèles $a_0\, b_1$ et $c_0\, d_1$; leurs plans projetants sont parallèles (Géométrie, n° 40), donc leurs projections sont parallèles. Leurs intervalles sont

égaux, puisqu'elles font le même angle avec le plan horizontal (n° 10).

Enfin, AB et CD forment un plan dont les horizontales AC et BD sont parallèles entre elles, d'où il suit que les cotes de AB et CD croissent dans le même sens.

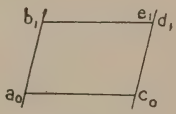

Fig. 11

2° La condition est suffisante. Nous supposons

$$ab = cd,$$

que ab et cd sont parallèles et que les cotes croissent dans le même sens. Menons CE parallèle à AB ; AB et CE satisfont aux conditions du théorème, donc la parallèle CE à AB coïncide avec CD.

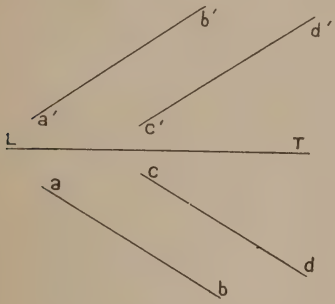

Fig. 12

14. *Droites parallèles*. — Les conditions néces-

saires et suffisantes pour que deux droites AB et CD soient parallèles sont que *ab* et *cd* soient parallèles, ainsi que *a'b'* et *c'd'* (Descriptive).

Même raisonnement qu'au (nº 13).

15. *Echelle de pente d'un plan.* — C'est une ligne de plus grande pente graduée en cotes rondes.

16. *Plans parallèles.* — La condition nécessaire est suffisante pour que deux plans soient *parallèles est qu'une ligne de plus grande pente de l'un soit parallèle à une ligne de plus grande pente de l'autre* (*cotée*).

1º La condition est nécessaire. Soient les plans parallèles P et Q. Leurs traces horizontales sont parallèles ; car si elles se coupaient P et Q se couperaient aussi.

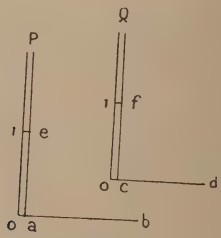

Fig. 13

Un plan vertical perpendiculaire à AB et CD coupe de même les plans parallèles P et Q suivant

deux droites parallèles, lesquelles sont des lignes de plus grande pente.

2° La condition est suffisante. Si les lignes de plus grande pente AE et CF sont parallèles, les horizontales AB et CD sont parallèles et les deux plans sont parallèles (Géométrie, n° 40).

17. *Mener par un point* oo′ *un plan parallèle à* $P\alpha Q'$. — Marquer dans $P\alpha Q'$ une droite *ab*, *a′b′* ;

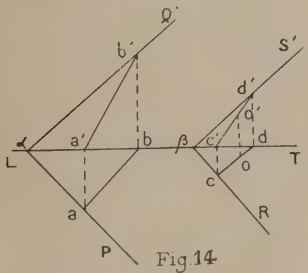

Fig. 14

lui mener par *oo′* une parallèle *cd*, *c′d′* par les traces de laquelle on mène R et S′ parallèles à P et Q′.

18. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle BAC ayant un côté AB parallèle au plan de projection se projette suivant un angle droit est qu'il soit un angle droit.*

1° La condition est nécessaire. Supposons $\widehat{bac}$ droit. La droite *ab* étant perpendiculaire à *ac* et A*a*

est perpendiculaire au plan AC*ac* ; sa parallèle AB l'est aussi, donc $\widehat{BAC} = 90^{\circ}$.

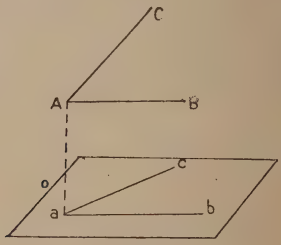

Fig. 15

2° La condition est suffisante. Même raisonnement en permutant AB et AC avec *ab* et *ac*.

19. *Intersection M d'une droite AB et d'un plan P.* — Rappelons qu'on fait passer par AB un plan Q auxiliaire (un plan projetant en descriptive un plan quelconque en côtée) ; Q coupe P suivant une droite qui rencontre AB en M.

20. *Section plane d'un polyèdre.* — Les côtés du polygone d'intersection sont des intersections du plan sécant avec des faces du polyèdre.

21. Ombre. — *L'ombre portée sur un plan P par un point A qu'éclaire un point lumineux S est la trace* a *de SA sur P.*

L'ombre portée par une droite AB est la portion de droite ab *comprise entre les ombres* a *et* b *portées par A et B*

Etant donné un polyèdre parmi les ombres que portent ses arêtes sur un plan, quelques-unes forment un contour polygonal à l'intérieur duquel sont contenues les autres ; ce *contour s'appelle le contour de l'ombre portée par le polyèdre.*

La recherche d'une ombre portée revient donc à des intersections de droites avec un plan.

22. *Droites et plans perpendiculaires.* — Les conditions pour qu'une droite AB et un plan $P\alpha Q'$ soient perpendiculaires sont que *ab* soit perpendiculaire à αP et $a'b'$ à $\alpha Q'$ (Descriptive).

1° La condition est nécessaire. Si AB est perpendiculaire à $P\alpha Q'$; l'angle droit que forme AB avec αP se projette horizontalement (n° 17) suivant un angle droit. Même raisonnement pour la projection verticale.

2° *La condition est suffisante, ab* étant perpendiculaire à l'horizontale αP; AB l'est aussi (n° 17); de même AB est perpendiculaire à $\alpha Q'$, donc (Géométrie n° 41) AB est perpendiculaire au plan.

23. *Droites et plans perpendiculaires.* — Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite a_1b_2 et un plan P défini par son échelle de pente c_1d_2 soient rectangulaires est que *ab* et *cd* soient

parallèles, que les intervalles *ab* et *cd* soient inverses l'un de l'autre, que les cotes croissent en sens contraires sur *ab* et *cd*.

1° Les conditions sont nécessaires. Soient AB perpendiculaire à P et *a*B sa projection sur le plan horizontal H. Le plan vertical AaB contenant A*a* et AB perpendiculaires à MN est perpendiculaire à MN et détermine dans P une ligne de plus grande pente AE, c'est-à-dire une parallèle à CD.

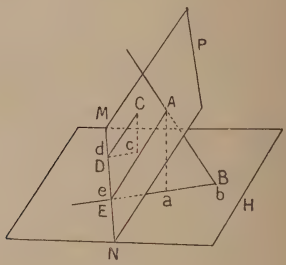

Fig. 16

Puisque *ab* et *ae* sont en prolongement, *ab* et *cd* sont parallèles et portent des cotes croissant en sens contraires. De plus l'intervalle de AB est (n°s 10 et 11) $\frac{AB}{aA}$, l'intervalle de CD ou AE est $\frac{aE}{aA}$ et le triangle EAB donne :

$$\frac{aB}{aA} \times \frac{aE}{aA} = 1.$$

2° Les conditions sont suffisantes. Supposons que AB et la ligne de plus grande pente CD du plan P remplissent les conditions de l'énoncé ; menons AI perpendiculaire à P. D'après la première partie du théorème AI remplira les mêmes conditions que AB par rapport à CD ; donc AB coïncide avec la perpendiculaire AI.

24. *Changement de plan vertical pour un point* oo'. — Soit L_1 T_1 la nouvelle ligne de terre. Mener

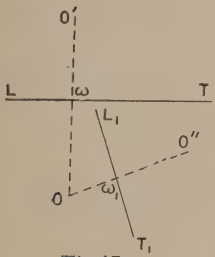

Fig. 17

$o\omega$ perpendiculaire à L_1 T_1 porter $\omega_1 o'' = \omega o'$ et o'' sera la nouvelle projection verticale du point oo'.

25. *Changement de plan vertical pour une droite.* — Faire le changement pour deux points de la droite.

26. *Changement de plan vertical pour un plan*

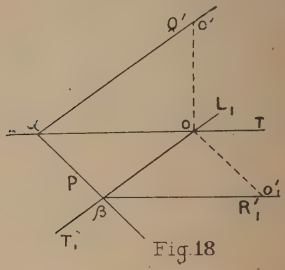

Fig. 18

$P\alpha Q'$. — Faire le changement pour le point oo' et $\beta o'_1$ est la nouvelle trace verticale R'_1 du plan.

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE

LIVRE V

	Pages
Inégalités entre les faces *a*, *b*, *c* d'un trièdre . .	1
Trièdres supplémentaires.	2

LIVRE VI

Volume du parallélépipède rectangle.	6
— du parallélépipède droit	6
— du prisme droit.	7
— du prisme oblique	8
— du parallélépipède oblique	9
— de la pyramide	11
— du tronc de pyramide.	13
— du tronc de prisme triangulaire. . . .	15
Equivalence de deux polyèdres symétriques . .	17
Rapport des volumes V et V′ de deux polyèdres semblables.	18

LIVRE VII

Aire de la surface latérale d'un cylindre droit . .	20
Aire de la surface totale du cylindre droit . . .	20
Volume du cylindre à base circulaire.	20

Pages
Aire de la surface latérale d'un cône droit . . . 21
Aire de la surface totale du cône droit 21
Volume du cône à base circulaire. 22
Aire de la surface latérale du tronc de cône droit. 22
Aire de la surface totale du tronc de cône droit . 23
Volume du tronc de cône à bases circulaires . . 23
Surfaces tournantes 24
Aire de la zone. 25
Aire de la sphère 25
Volumes tournants 26
Volume du secteur sphérique 28
Volume de la sphère 29
Volume de l'anneau 29
Volume du segment sphérique. 30
Volume du segment sphérique à une base . . . 31
Quelques questions moins importantes, mais qu'il est bon de savoir 33
Détermination d'un plan. 33
Droite et plan parallèles. 34
Droite et plan perpendiculaires 35
Théorème des trois perpendiculaires. 36
Angles dièdres 36
Figures symétriques dans l'espace. 37
Définition et propriétés des polyèdres homothétiques 38
Polyèdres semblables. 39
Symétries du cube et de l'octaèdre réguliers . . 39
Rayon d'une sphère solide 40
Tableau des formules de géométrie 41-44

TRIGONOMÉTRIE

Relation entre les fonctions circulaires d'un même arc 45
Formule de Chasles 46
Théorème des projections 47

Pages

Valeur de la projection orthogonale *ab* d'un vecteur AB 48
Addition et multiplication des arcs 49
Formules de multiplication 52
Expressions rationnelles de sin a et cos a en fonction de tg $\frac{a}{2}$ 52
Division des arcs 54
Calcul de tg $\frac{a}{2}$ en fonction de tg a. 56
Expressions rendues logarithmiques 58
Equations trigonométriques. 60
Equation $a \cos x + b \sin x = c$ 60
Equation $a \sin^2 x + b \sin x + c \cos^2 x = d$. . 62
Triangles rectangles 62
Relations entre les éléments d'un triangle quelconque. 63
Résolutions des triangles 65
Aire d'un triangle 68
Tableau des formules de trigonométrie 69-73

ALGÈBRE

Equation et trinôme du second degré. 74
Signe du trinôme 77
Dérivées 78
Signification géométrique de la dérivée. Variations de fonctions 83
Vitesse et accélération dans un mouvement rectiligne, mouvement uniformément varié . . . 88
Mouvement rectiligne accéléré ou retardé . . . 90
Définition et équation du mouvement rectiligne uniformément varié 91
Déplacement d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié 91

GÉOMETRIE COTÉE ET DESCRIPTIVE

Pages
Plan de projections 97
Rabattement sur un plan horizontal 97
Angle de deux droites 97
Distance d'un point à une droite et à un plan. . 98
Angle de deux plans 99
Deux plans de projections 100
Angle de deux droites 100
Distance d'un point *oo'* à une droite *ab*, *a'b'*. . . 101
Distance d'un point *oo'* à un plan PαQ' 102
Angle de deux plans 103
Questions de moindre importance. 103
Pente d'une droite 103
Intervalle d'une droite 104
Droites concourantes 104
Droites parallèles 104
Plans parallèles. 106
Mener par un point *oo'* un plan parallèle à PαQ' . 107
Intersection d'une droite et d'un plan 108
Section plane d'un polyèdre 108
Ombres 108
Droites et plans perpendiculaires 109
Changement de plan vertical pour un point *oo'* . 111
Changement de plan vertical pour une droite . . 111
Changement de plan vertical pour un plan PαQ' . 112

LAVAL. — IMPRIMERIE L. BARNÉOUD ET Cie.

JOURNAL DES EXAMENS DU BACCALAURÉAT

COMPRENANT LES ÉPREUVES ÉCRITES ET ORALES

Cette publication parait tous les jours pendant la durée des sessions par numéros de 4 ou 8 pages in-8°

PREMIÈRE PARTIE. — CLASSE DE PREMIÈRE

I. **Latin-Grec**, comprenant : 1° les jours de compositions écrites les trois sujets de composition française avec *plans et développements*, le texte de la version latine avec sa *traduction*, le texte de la version grecque avec sa *traduction* ; 2° les jours d'examen oral, des questions posées aux *examens oraux* sur toutes les parties du programme et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juillet, **2** fr., d'octobre, **2** fr.

II. **Latin-Langues vivantes**, comprenant : les *sujets* de composition française avec *plans et développements*, le *texte* de la *version latine* avec sa *traduction*, le *texte* de la *composition* en *langue vivante étrangère* ; des questions posées aux *examens oraux* sur toutes les parties du programme et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juillet, **2** fr., de novembre, **2** fr.

III. **Latin-Sciences**, comprenant les *sujets* de composition française avec *plans et développements*, le *texte* de la version latine avec sa *traduction*, les *énoncés* des compositions de mathématiques et de physique avec *solutions* des problèmes ; des questions posées aux *examens oraux* sur toutes les parties du programme et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juillet, **2** fr., de novembre, **2** fr.

IV. **Sciences-Langues vivantes**, comprenant les *sujets* de composition française avec plans et développements, le *texte* de la composition *en langue vivante étrangère*, les *énoncés* des compositions de mathématiques et de physique avec *solutions* des problèmes ; des questions posées aux *examens oraux* sur toutes les parties du programme et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juillet, **2** fr., de novembre, **2** fr.

DEUXIÈME PARTIE

I. **Philosophie**, comprenant : 1° les sujets et les *plans* des dissertations philosophiques, les énoncés des compositions scientifiques avec *solutions* s'il y a lieu ; 2° les *développements* des dissertations, des questions posées à l'*examen oral* et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juill., **2** fr. **50**, de nov., **1** fr. **50**

II. **Mathématiques**, comprenant pour chaque jour d'examen les énoncés des compositions scientifiques avec les solutions *développées* des problèmes, les sujets de dissertation philosophique avec *plans* ou *développements* ; des questions posées aux *examens oraux* sur toutes les parties du programme et les noms des *candidats reçus* à Paris.

Abonnement : 1 an, **4** fr., ou session de juill., **2** fr. **50**, de nov., **1** fr **50**

LIBRAIRIE CROVILLE-MORANT, 20, RUE DE LA SORBONNE,

EN VENT

LE NOUVEAU

BACCALAURÉA

DE

L'ENSEIGNEMENT SECONDAIR

Guide Pratique du Candid

LÉGISLATION — RENSEIGNEMENTS
PROGRAMMES

Brochure in-18 de 104 pages. Prix . . 0 f
Franco . . . . . 0 f

LAVAL. — IMPRIMERIE L. BARNÉOUD ET Cie.

Lithomount
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros. Inc.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510H36Q C001
QUESTIONS & FORMULES ESSENTIELLES DE MAT
3 0112 016936210